


 Lernstandserhebung

 **Didaktisches Material**


6

Mathematik (Heft B)

Impressum

Erarbeitet durch

AufgabenentwicklerInnen des Länderverbundprojektes Lernstand / VERA 6:

Manfred Bergunde	Hamburg
Kerstin Both	Mecklenburg Vorpommern
Maria Braunhofer	Italien, Südtirol
Detlef Cords	Mecklenburg Vorpommern
Stefan Cyriax	Sachsen
Helmut Fehre	Sachsen
Klaus Gülker	Mecklenburg Vorpommern
Stefanie Heinisch	Hamburg
Angelika Klatte	Sachsen
Evelin Klingebiel	Thüringen
Heide Kretzschmar	Mecklenburg Vorpommern
Ralf Lienenbecker	Hessen
Sibylle Mackenroth	Sachsen
Heidi Viertel	Sachsen
Peter Weigert	Sachsen
Sylvia Welisch	Hessen

Koordination und Leitung:

Astrid Fischer-Paulin	SBI, Radebeul
Michaela Schober	Thillm, Bad Berka
Heiko Wontroba	Thillm, Bad Berka

Begutachtung und Beratung:

Dr. Christa Herwig	Thüringen
Dr. Dominik Leiß	Leuphana Universität, Lüneburg

Inhaltsverzeichnis

Impressum.....	2
Inhaltsverzeichnis	3
Zuordnung von Standardmerkmalen	4
Vorbemerkungen.....	5
Aufgabe 1: Veranschaulichung von Brüchen	7
Aufgabe 2: Rechnen mit Größen.....	9
Aufgabe 3: Quadernetz	11
Aufgabe 4: Fischfutter	13
Aufgabe 5: Kreisteile	15
Aufgabe 6: Würfeltunnel	18
Aufgabe 7: Wasserdruck	20
Aufgabe 8: Zahlenkarten und Zeichenkarten.....	25
Aufgabe 9: Zwei Klassen	28
Aufgabe 10: Entscheiden und Begründen	31
Aufgabe 11: Kreise.....	34
Aufgabe 12: Gartengrundstück	38
Aufgabe 13: Würfelkörper I	42
Aufgabe 14: Fußgängerüberweg.....	44
Aufgabe 15: Seillänge.....	47
Aufgabe 16: Symmetrie	50
Aufgabe 17: Gewichtige Rechnung	54
Aufgabe 18: 24 Stunden	56
Aufgabe 19: Wackelturm.....	59
Aufgabe 20: Kleidergrößen	61
Aufgabe 21: Kuchen	63
Aufgabe 22: Würfelkörper II	65
Aufgabe 23: Gleichung.....	68
Aufgabe 24: Flächen.....	70
Aufgabe 25: Dreiecksfigur	74

Zuordnung von Standardmerkmalen

Aufgaben		Allgemeine mathematische Kompetenzen						Leitideen					Anforderungsbereiche		
Nr.	Kurztitel	K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	I	II	III
1	Veranschaulichung von Brüchen				X	X		X					X		
2	Rechnen mit Größen					X		X					X		
3	Quadernetz				X					X			X		
4	Fischfutter			X		X					X			X	
5	Kreisteile				X	X		X					X		
6	Würfeltunnel		X		X					X					X
7a	Wasserdruck				X							X	X		
7b	Wasserdruck			X	X						X			X	
8	Zahlenkarten und Zeichenkarten		X			X		X						X	
9	Zwei Klassen				X		X					X		X	
10	Entscheiden und Begründen	X				X			X					X	
11	Kreise		X		X		X	X							X
12	Gartengrundstück		X		X	X			X					X	
13	Würfelkörper I				X					X				X	
14	Fußgängerüberweg				X		X					X		X	
15	Seillänge	X		X		X		X							X
16	Symmetrie				X					X				X	
17	Gewichtige Rechnung					X			X				X		
18	24 Stunden			X		X		X							X
19	Wackelturm			X		X			X					X	
20	Kleidergrößen				X		X				X		X		
21	Kuchen			X			X				X			X	
22	Würfelkörper II				X					X				X	
23	Gleichung		X			X					X			X	
24	Flächen				X	X			X					X	
25	Dreiecksfigur		X		X						X				X

Legende:

Allgemeine mathematische Kompetenzen

- K1: Mathematisch argumentieren
 K2: Probleme mathematisch lösen
 K3: Mathematisch modellieren
 K4: Mathematische Darstellungen verwenden
 K5: Mit formalen, technischen und symbolischen Elementen der Mathematik umgehen
 K6: Kommunizieren

Leitideen

- L1: Zahl
 L2: Messen
 L3: Raum und Form
 L4: Funktionaler Zusammenhang
 L5: Daten und Zufall

Anforderungsbereiche

- I: Reproduzieren
 II: Zusammenhänge herstellen
 III: Verallgemeinern und Reflektieren

Vorbemerkungen

Adressaten sind Lehrkräfte, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie weitere Lehrkräfte, Fachkonferenzen und innerschulische Gruppen. Sie alle sollen durch das vorliegende Material angeregt werden, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu erkennen, insbesondere im Hinblick auf die individuelle Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler.

Aufbau und Struktur sind durch die Aufgaben des Tests bestimmt. Jede Aufgabe ist kommentiert. Der Umfang und die Tiefe des Kommentars richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zur schnelleren Orientierung zusätzlich am unteren Rand ersichtlich.

Eine Kommentierung zu einer Aufgabe umfasst folgende Teile:

- Begründung für die Zuordnung der Standardeigenschaften¹ zu einer Aufgabe (und damit der Hinweis auf das didaktische Potential der Aufgabe),
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler (u. a. häufig zu erwartende Fehler und Hinweise zur Diagnose),
- Hinweise zur Weiterarbeit.

An verschiedenen Stellen der Kommentierungen erfolgt der Verweis zur Veröffentlichung „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ des IQB, weil in diesem Buch eine große Anzahl von Aufgaben mit ausgewiesenen Standardbezügen und Unterrichts Anregungen vorgestellt werden.

Bezüge zu den Bildungsstandards sind bei der Erarbeitung bzw. Auswahl der Aufgaben für den Test hergestellt worden. Sie werden im vorliegenden Material zum einen durch die Analyse der Standardeigenschaften bei jeder Aufgabe, zum anderen durch die Verteilung jeder Standardeigenschaft in der Menge aller Aufgaben eines Testheftes deutlich. Nicht in jedem Testheft gelingt es, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter konnte von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilen nur eine Teilaufgabe ausgewählt werden und es musste auf weitere mathematisch interessante Aspekte verzichtet werden. Die Kommentierungen ermöglichen aber, weitere Teilaufgaben aufzugreifen und Aufgabenvariationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung ist es, Lehrkräfte in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei jeder Schülerin und jedem Schüler zu unterstützen. Dazu müssen sie u. a. Klarheit darüber haben, welches Potential in einer Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann. So kann über längere Zeiträume hinweg am Aufbau von Kompetenzen gearbeitet werden. Im vorliegenden Material wird für jede Aufgabe die Zuordnung zu den Standardmerkmalen (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen wird so

¹ Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 4.12.2003, S.7 – 15.

deutlich, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zu einer mathematischen Kompetenz bestimmt.

Überlegungen, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können, sind Teil jeder Kommentierung. Es werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Aufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und häufig zu erwartende Fehler betrachtet und darüber hinaus Hinweise zur Diagnose gegeben. Dies soll die Lehrkräfte dabei unterstützen, Ansätze zur individuellen Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler zu entwickeln. Weiterhin enthält die Kommentierung für jede Aufgabe Vorschläge, wie diese verändert bzw. variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Die Vorschläge beinhalten auch Anregungen zur Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, Hinweise auf den Umgang mit verschiedenen Lösungen und Überlegungen zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegebenen Sachverhalts. Es wird deutlich, wie sich Testaufgaben und Lernaufgaben unterscheiden.

An der Weiterentwicklung wird von Jahr zu Jahr gearbeitet. So wird angestrebt, die Kommentierungen zu den einzelnen Aufgaben in den nächsten Jahren in Form einer Online-Datenbank anzubieten. Hinweise zum vorliegenden Material nehmen wir gern unter kompetenztest@sbi.smk.sachsen.de entgegen.

Literatur:

- /1/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 04.12.2003
- /2/ W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006
- /3/ Kommentierungshefte zu den Haupttests 2008, 2009 und 2010
- /4/ www.kompetenztest.de
- /5/ Das Mathematikbuch – Lernumgebungen, Ausgabe A, Schülerbuch - 6. Schuljahr, Ernst Klett Verlag

Aufgabe 1: Veranschaulichung von Brüchen

Aufgabe

Veranschauliche $\frac{3}{4}$ von einem Ganzen durch eine Skizze.

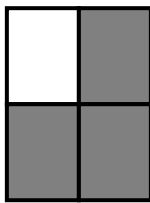
Lösung

Richtige und vollständige Skizze:

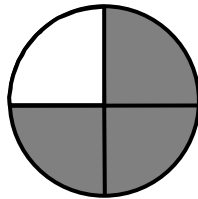
Eine Figur wurde in vier gleich große Teile zerlegt. Drei dieser Teile wurden hervorgehoben.

z. B.:

(1)



(2)



(3) ...

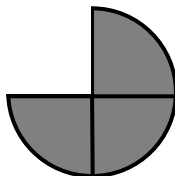
Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die **Schülerinnen und Schüler** visualisieren ihre Vorstellungen eines Bruches und verwenden dazu eine schematische Darstellung (L1, K4). Die Kenntnis der Bedeutung von Zähler und Nenner bildet dabei eine Voraussetzung (K5). Es werden vertraute und geübte Darstellungen angewandt (AB I).

Fehler sind zu erwarten, wenn keine Sinn tragenden Vorstellungen von Brüchen entwickelt wurden. Das kann z. B. dazu führen, dass drei Teile ohne einen Bezug zum Ganzen dargestellt werden.



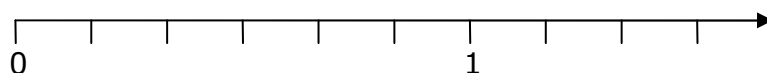
Für eine detaillierte **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Darstellung zu kommentieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Das Visualisieren von Sachverhalten dient der Entwicklung des Vorstellungsvermögens der Schülerinnen und Schüler in vielen Bereichen der Mathematik. Es erleichtert das Verständnis und damit den Zugang zu mathematischen Fragen und Problemen und kann vielfältig eingesetzt werden. Schwerpunkt des Unterrichts sollte die Erarbeitung eines von der Vorstellung getragenes Verständnis von Brüchen sein.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, haben unzureichende Vorstellungen von Brüchen. Ihnen ist der Zusammenhang zwischen Teilen und ihrem Ganzen nicht bewusst oder sie haben Probleme bei der Darstellung der Teile von Ganzen. Anschauliches Arbeiten kann hier hilfreich sein. Die Schülerinnen und Schüler sollten angeregt werden, zu zeichnen oder auch zu basteln. Dabei können die folgenden Aufgaben hilfreich sein.

- Schneide zwei verschieden farbige Kreise mit gleichem Radius ($r = 5 \text{ cm}$) aus. Schneide in jeden Kreis einen Radius ein. Stecke die Kreise in den Radien ineinander. Drehe an einem Kreis und stelle so verschiedene Anteile von Ganzen dar.
- Den wievielten Teil deiner Klasse bildest du?
- Zeichne ein Quadrat. Kennzeichne die Hälfte (ein Viertel, ein Drittel, drei Viertel) des Quadrates farbige.
- Trage folgende Brüche auf dem Zahlenstrahl ein. Begründe deine Zuordnung. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{6}{6}; \frac{3}{2}$



- Stelle $\frac{4}{3}$ auf einem Zahlenstrahl dar.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, haben Sinn tragende Vorstellungen von Brüchen entwickelt. Ihnen können anspruchsvollere Aufgaben, wie im Folgenden dargestellt, angeboten werden.

- Stelle $\frac{5}{4}$ eines Ganzen mit Hilfe geometrischer Figuren dar.
- Veranschauliche $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
- Beschreibe den Unterschied in der Darstellung von echten und unechten Brüchen.
- Veranschauliche $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ so, dass deine Mitschüler sich die Aufgabe vorstellen können. Erkläre anhand deiner Darstellung, dass $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$ nicht lösbar ist.

Aufgabe 2: Rechnen mit Größen

Aufgabe

Berechne.

$$20 \text{ €} - 15,25 \text{ €} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ €}$$

Lösung

4,75

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler nutzen bei der Lösung dieser Aufgabe im Unterricht geübte Kopfrechenverfahren oder schriftliche Rechenverfahren (L1, K5, AB I). Sie könnten zuerst $20 \text{ €} - 15 \text{ €}$ berechnen und anschließend 75 Cent von den verbleibenden 5 € subtrahieren. Eine weitere Möglichkeit ist die Übersetzung in die Additionsaufgabe $15,25 \text{ €} + \square = 20 \text{ €}$. Diese könnten die Schülerinnen und Schüler durch schrittweises Addieren (z. B. erst 5 Cent, dann sieben mal nacheinander 10 Cent und viermal nacheinander 1 €) lösen oder sie ergänzen 75 Cent bis zu 16 € und anschließend 4 €. Wenn sie $15,25 \text{ €} + 5 \text{ €} = 20,25 \text{ €}$ rechnen, müsste sich noch die Rechnung $5 \text{ €} - 25 \text{ Cent}$ anschließen.

Bei der Nutzung eines schriftlichen Rechenverfahrens ist auf
$$\begin{array}{r} 20,00 \text{ €} \\ - 15,25 \text{ €} \end{array}$$
 stellengerechtes Untereinanderschreiben zu achten.

Die Lösung 5,75 € ist ein häufig zu erwartender **Fehler** beim Kopfrechnen. Die Schülerinnen und Schüler rechnen hier zunächst $20 \text{ €} - 15 \text{ €} = 5 \text{ €}$ und ergänzen danach 0,25 € mit 0,75 € zu 1,00 €. Die Teilergebnisse werden addiert. Fehlerhafte Ergebnisse bei der Verwendung des schriftlichen Verfahrens können durch die Nichtbeachtung eines bzw. aller Überträge (4,85 €; 5,85 €; 15,85 €; ...) entstehen. Hintergrund beider Fehler ist die Überschreitung eines Zehners.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, kann es sinnvoll sein, Kopfrechenaufgaben beginnend im Bereich der natürlichen Zahlen zu lösen, wie:

- $100 - 25$; $100 - 45$; $100 - 73$; $100 - 88$;
- $1000 - 250$; $1000 - 380$;
- $25 + \square = 100$; $62 + \square = 100$; ...
- $60 - 30$; $60 - 25$; $60 - 40$; $60 - 47$; ...
- Wie viel fehlt von 33 bis zu 100?

- Rechne nach und berichtige die Fehler. $10 - 7 = 3$; $100 - 77 = 33$...
- $1000 \text{ g} - 375 \text{ g}$

Berechnungen mit einfachen Bruchteilen könnten sich anschließen, wie z. B.

- Ergänze zu einem Ganzen. $0,5$; $0,75$; ...
- $0,3 + \square = 1$; $0,35 + \square = 1$
- Wie viele fehlen zu 2 Ganzen? $0,5$; $0,75$; ...
- $1,30 + \square = 3,00$; $1,35 + \square = 3,00$...
- $1,00 - 0,20$; $1,00 - 0,22$; ...

Durch die zeichnerische Darstellung von Aufgaben am Zahlenstrahl könnten die Schülerinnen und Schüler anschaulich die Bedeutung einer Zehnerüberschreitung erfahren. Ebenso ist in Anlehnung an ihre Erfahrungswelt der Einsatz von Spielgeld möglich für das handlungsorientierte Lösen von Aufgaben.

- Max hat für $10,59 \text{ €}$ eingekauft und mit einem $20 - \text{Euroschein}$ bezahlt. Wie viel Geld muss er zurückbekommen? Wie viel Geld muss er zurückbekommen, wenn er mit einem $50 - \text{Euroschein}$ bezahlt?

Für die Festigung der schriftlichen Rechenverfahren können in großer Zahl angebotene interaktive Arbeitsblätter genutzt werden.

Aufgaben mit Größen, die zusätzlich unterschiedliche Einheiten beinhalten können, sind für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten** geeignet, z. B.:

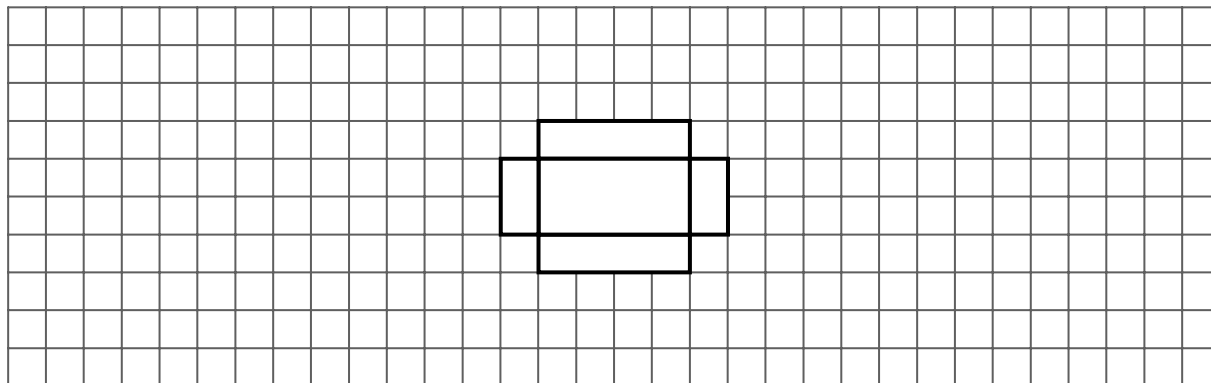
- $1 \text{ kg} - 375 \text{ g} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ g}$
- $1 \text{ l} - 250 \text{ ml} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ml}$
- $1 \text{ l} - 0,75 \text{ l} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ l}$
- Wie viel Zentimeter fehlen zu einem Meter? 12 cm ; $1,2 \text{ cm}$; ...
- In Peters Garten steht eine riesige Sonnenblume, sie ist $5,10 \text{ m}$ groß. Peter ist $1,62 \text{ m}$ groß. Um wie viel Meter ist die Sonnenblume größer als Peter?
- Zum Wettbewerb um die höchste Sonnenblume der Stadt wurden folgende Höhen von Sonnenblumen gemessen:
 $2,48 \text{ m}$; $3,80 \text{ m}$; $2,40 \text{ m}$; $5,10 \text{ m}$; $4,20 \text{ m}$; $3,75 \text{ m}$; $4,30 \text{ m}$.
Berechne den Unterschied zwischen der größten und der kleinsten Höhe.
- Aus einer Flasche mit $1,5 \text{ l}$ Mineralwasser wurden vier Gläser mit je 200 ml getrunken. Für ein Mixgetränk wird ein Liter Mineralwasser benötigt. Reicht der Rest aus der Flasche noch? Begründe.
- Franziska möchte ihrer Mutti zum Geburtstag einen Blumenstrauß schenken. Sie hat $5,00 \text{ €}$ dafür gespart. Eine Nelke kostet $0,50 \text{ €}$, eine Rose $0,80 \text{ €}$ und eine Gerbera $0,60 \text{ €}$.
Stelle einen Strauß zusammen, der genau $5,00 \text{ €}$ kostet, wenn für $0,30 \text{ €}$ noch Dekorgrün berechnet werden muss.

Siehe auch /4/ Kompetenztest Mathematik Klasse 6; 2006 Aufgabe 5 und 2007 Aufgabe 16b

Aufgabe 3: Quadernetz

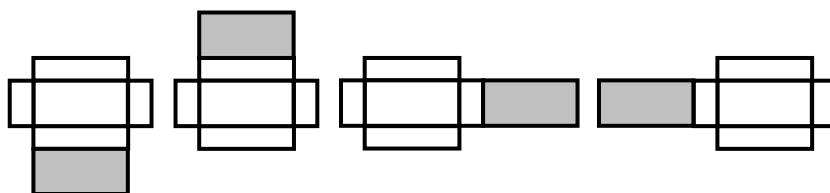
Aufgabe

Es soll ein Quadernetz entstehen.
Ergänze die fehlende Fläche.



Lösung

Die fehlende Fläche wurde richtig ergänzt. Folgende Lösungen sind möglich:



Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die fehlende Fläche im Quadernetz finden Schülerinnen und Schüler, wenn sie wissen, dass ein Quader von sechs rechteckigen Flächen begrenzt wird, von denen jeweils zwei kongruent sind und einander gegenüberliegen. Dies ist in der vertrauten und geübten Zeichnung des Körpernetzes umzusetzen (L3, K4, AB I). Anhand der Zeichnung identifizieren sie, welche Fläche fehlt und welche Maße die fehlende Fläche hat. Sie wissen, dass in der Netzzeichnung gleiche Flächen nicht nebeneinander liegen dürfen und könnten 4 verschiedene Möglichkeiten finden, um das fehlende Rechteck zu ergänzen.

Ein typischer **Fehler** ist, dass Schülerinnen und Schüler eine der anderen beiden Flächen ergänzen. In diesem Fall liegen dann zwei gleiche Flächen im Körpernetz nebeneinander. Fehler entstehen auch, wenn ein beliebiges anderes Rechteck oder das richtige Rechteck mehrfach ergänzt wird. Ursachen dafür liegen in der mangelhaften räumlichen Vorstellung.

Hinweise zur Weiterarbeit

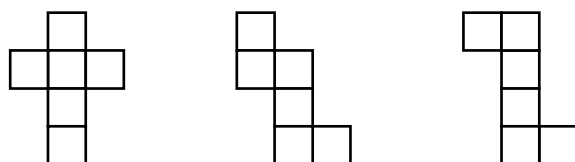
Die handlungsorientierte Erarbeitung von Quadernetzen als Abwicklung von Modellkörpern (Würfel, verschiedene andere Quader, auch Verpackungen) ist besonders für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, empfehlenswert. Hierbei können auch so genannte „Klickplatten“ oder andere Bausätze genutzt werden.

Gewonnene Erkenntnisse sollten schrittweise zum Erkennen von Quadernetzen, Zeichnen von Quadernetzen zu vorgegebenen Modellen oder zu Quadern nach vorgegebenen Maßen angewendet werden.

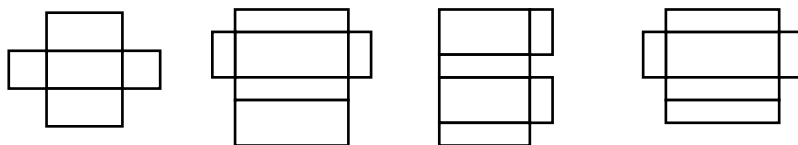
Besondere Beachtung sollte die Stellung gegenüberliegender Seiten im Netz finden.

Beispiele:

- Färbe im Körpernetz die Flächen mit drei verschiedenen Farben. Die gegenüberliegenden Flächen sollen die gleiche Farbe haben.



- Welche Körpernetze ergeben keinen Quader? Begründe.

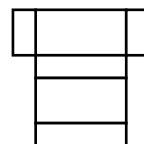


- Zeichne ein Netz des gegebenen Modellquaders.
- Zeichne ein Netz eines Quaders, der 5 cm lang, 3 cm breit und 2 cm hoch ist.
- Stelle eine quaderförmige Verpackung her, die 10 cm lang, 5 cm breit und 2 cm hoch ist.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten Aufgaben lösen, in denen das Verständnis eines Quadernetzes angewendet wird. Mit steigender Komplexität erhöht sich der Anforderungsbereich der Aufgaben und es werden zusätzlich weitere mathematische Kompetenzen benötigt.

Beispiele:

- Stelle eine oben offene quaderförmige Verpackung her. Sie soll 10 cm lang, 5 cm breit und 3 cm hoch sein. Die Öffnung soll größtmöglich sein. Zeichne hierfür ein Netz als Kopiervorlage.
- Gegeben ist ein Netz eines Quaders. Zeichne fünf weitere mögliche Netze dieses Quaders.



- Vier kleine quaderförmige Bonbonschachteln (5 cm lang, 4 cm breit und 1,5 cm hoch) sollen in eine größere quaderförmige Schachtel verpackt werden. Stelle zwei verschiedene solcher Schachteln her, in die jeweils genau vier kleine Bonbonschachteln hineinpassen.
- „Es gibt kein Quadernetz, bei dem mehr als zwei Seitenflächen gleiche Maße haben.“ Ist diese Aussage wahr? Begründe.

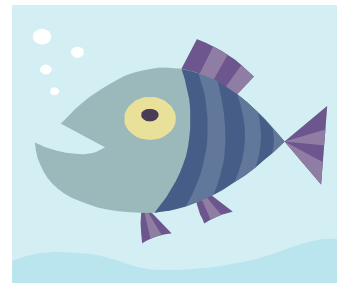
Aufgabe 4: Fischfutter

Aufgabe

Lino hat in seinem Aquarium 18 Fische.
Diese muss er jeden Tag mit 6 Futtertabletten füttern.
Zum Geburtstag schenkt ihm seine Oma noch 6 dieser Fische, die Lino zu den anderen ins Aquarium gibt.

Wie viele Futtertabletten muss Lino jetzt jeden Tag füttern?

Lino muss jetzt jeden Tag _____ Futtertabletten füttern.



Lösung

8

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung dieser Aufgabe muss ein Zusammenhang zwischen Anzahl der Fische und Anzahl der Futtertabletten in einer Realsituation erkannt und verwendet werden (L4, K3). Die Lösung ergibt sich aus proportionalen Zusammenhängen wie $18 : 24 = 6 : x$ oder entsprechenden Gleichungen wie $6 : 18 = \frac{1}{3}$. Auch durch die Verwendung von Zuordnungsgraphen oder Tabellen gelangt man zum Ergebnis (K5). Nur das Ergebnis ist gefragt, ein Lösungsweg muss nicht dargestellt werden. In der Regel werden die Schülerinnen und Schüler entweder die Tablettenanzahl für die neuen Fische ausrechnen und zur alten Tablettenanzahl addieren oder unter Ausnutzung der Proportionalität zunächst das elementare Wertepaar bestimmen und dann das Ergebnis berechnen, z. B. (3 Fische / 1 Tablette) $\rightarrow$ (24 Fische / 8 Tabletten), so dass der Lösungsweg mehrschrittig ist (AB II). Es ist jedoch nicht auszuschließen, dass Schülerinnen und Schüler auch durch Schätzen oder falsches Schließen auf die richtige Tablettenzahl kommen.

Als zu erwartende **Fehler** kommen hauptsächlich in Frage: Fehler, denen ein falsches mathematisches Modell zu Grunde liegt, oder Rechenfehler.

Die Lösungsnotizen im Testheft können für eine **Diagnose** hilfreich sein. Genauerer Aufschluss über die Fehlerursache erbringen mündliche Äußerungen. Eine Nicht-Bearbeitung könnte darauf hindeuten, dass die Schülerin oder der Schüler entweder Unsicherheiten im Finden bzw. Anwenden eines

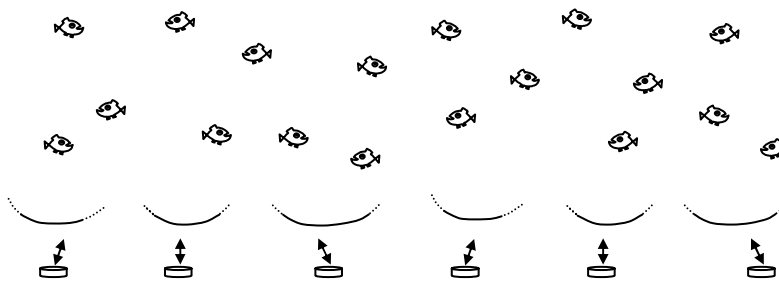
mathematischen Modells hat, oder dass der Realsituation praktische Probleme unterstellt werden, die einer Modellierung im Wege stehen, z. B. durch ein Festhalten an der Frage: „Wie machen es 18 Fische, wenn sie sich 6 Tabletten teilen sollen?“.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich vor allem solche Übungen an, die das Modellieren schulen, denn das Rechnen innerhalb des Modells ist bei dieser Aufgabe so einfach, dass Rechenfehler zwar vorkommen können, aber in der Regel kein Indiz für die Notwendigkeit gezielten Rechentrainings darstellen. Um von der geschilderten Situation zum mathematischen Modell zu gelangen, ist eine anschauliche Vorstellung von der Realsituation nützlich. Diese kann sich z. B. an bildlichen Darstellungen entwickeln, die zusammen mit Form bildenden Elementen eine Grundlage für das mathematische Modell geben.

Beispiel:

- Hier siehst du eine Skizze von 18 Fischen und 6 Futter-Tabletten. Jeder Fisch soll gleich viel Futter bekommen. Fasse durch Umrandungen jeweils diejenigen Fische zusammen, die sich eine Futter-Tablette teilen sollen



An diese Übung könnte sich die Aufforderung anschließen, 6 weitere Fische zu skizzieren und die Einteilung bei den gegebenen Voraussetzungen fortzusetzen.

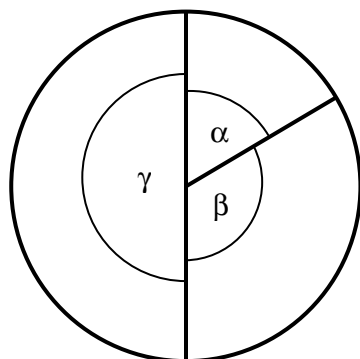
Wenn die bildliche Vorstellung der Realsituation sicher vorhanden ist, können die üblichen Mittel der Dreisatzrechnung, z. B. Ausformulieren in Sätzen oder Anlegen von Tabellen vertiefend eingesetzt werden.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können sich mit anderen Aufgaben-Varianten der Dreisatzrechnung befassen oder eigene Aufgaben erfinden.

Aufgabe 5: Kreisteile

Aufgabe

In einem Kreis sind verschiedene Kreisteile durch ihre Winkel gekennzeichnet. Es gilt: $\alpha = 60^\circ$



Gib den Anteil des Winkels α am Vollwinkel als Bruch an.

Der Anteil des Winkels α am Vollwinkel beträgt _____ .

Lösung

$\frac{1}{6}$ (oder gleichwertige Angabe)

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Abbildung den Kreissektor identifizieren, der durch den Winkel gekennzeichnet wird (K4). Sie benötigen Sinn tragende Vorstellungen von Bruchzahlen und ihrer Verwendung zur Angabe von Anteilen (L1). Die Größen des Winkels α und des Vollwinkels müssen ins richtige Verhältnis gesetzt werden. Es handelt sich um ein einschrittiges Routineverfahren. Der Bruch muss nicht gekürzt werden (K5, AB I).

Fehler sind hauptsächlich dann zu erwarten, wenn die Vorstellungen von Bruchzahlen und ihrer Verwendung zur Angabe von Anteilen nicht tragfähig genug sind, um die Aufgabenstellung zu erfassen. Rechenfehler dürften bei dem gegebenen einfachen Zahlenmaterial eher die Ausnahme sein. Denkbar ist auch, dass dem Innenwinkel des Vollkreises keine oder eine von 360° abweichende Winkelgröße zugeordnet wird.

Für eine **Diagnose** ist es hilfreich, die Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg schildern zu lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

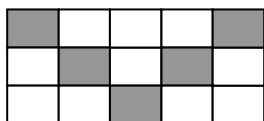
Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, wird es sinnvoll sein, sich noch einmal grundlegend mit Bruchzahlen zur Angabe von Anteilen zu beschäftigen.

Aufgaben, in denen Anteile von Kreisen, Rechteckflächen oder den Flächen anderer Vielecke abgelesen bzw. in diese eingezeichnet werden müssen, bieten sich an. Dabei ist besonders auf die exakte Verwendung der Sprache zu achten, wie zum Beispiel: „Wie groß ist der grau gefärbte Anteil an dem gesamten Rechteck?“

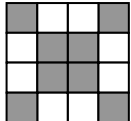
Weiter können Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, Brüchen Abbildungen von Repräsentanten zuzuordnen.

- Welcher Anteil der Figur ist grau gefärbt?

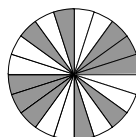
a)



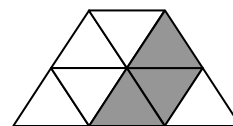
b)



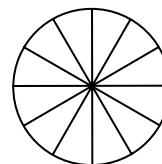
c)



d)

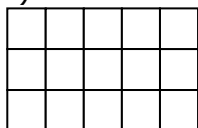


- Ein Kreis ist in 12 gleich große Teile zerlegt.
a) Gib die Winkelgröße eines Kreisteils an.
b) Färbe in der Figur drei zusammenhängende Kreisteile. Gib die Größe des gefärbten Kreisteils als Bruch und als Winkel an.



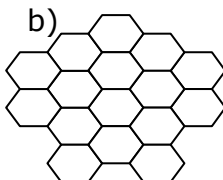
- Färbe in der Figur den angegebenen Anteil.

a)



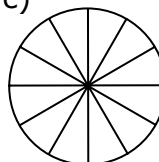
$$\frac{3}{5}$$

b)



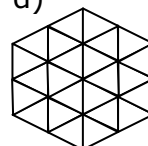
$$\frac{1}{2}$$

c)



$$\frac{2}{3}$$

d)



$$\frac{5}{8}$$

Die Schwierigkeit lässt sich bei den beschriebenen Aufgaben dadurch erhöhen, dass eine Unterteilung der Figuren nicht vorgegeben wird.

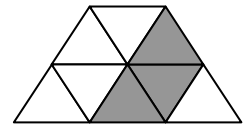
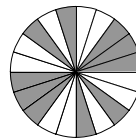
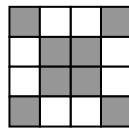
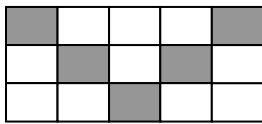
- Stelle jeweils die Anteile in folgenden Figuren dar:

- a) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{12}$ in verschiedenen Rechtecken
b) $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$ und $\frac{5}{8}$ in verschiedenen Kreisen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können komplexere Figurvorgaben bearbeiten oder selbst erfinden.

Darüber hinaus kann die Gesamtheit bei der Aufgabenstellung so verändert werden, dass sie nur noch einen Teil einer Figur umfasst, z. B.:

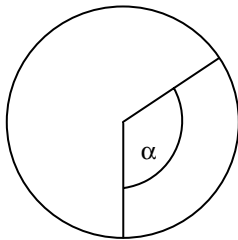
- Gegeben sind die vier Figuren:



- (1) Die mittlere Zeile des Rechtecks enthält 2 grau gefärbte Kästchen. Welcher Anteil von der mittleren Zeile ist grau gefärbt?
- (2) Das große Quadrat wird vollständig in vier gleichgroße kleinere Quadrate zerlegt. Wie groß ist der gefärbte Anteil in jedem dieser kleinen Quadrate?
- (3) Gibt es Teile des Kreises, in denen der Anteil der gefärbten Fläche gleich groß ist? Begründe.
- (4) Die gefärbte Fläche ist $\frac{3}{4}$ des Ganzen. Umrahme das Ganze farbig.

Auch Umkehrungen der Testaufgabe sind denkbar.

- Wie groß ist der Winkel α , wenn das Kreisteil den angegebenen Anteil am Vollkreis haben soll.

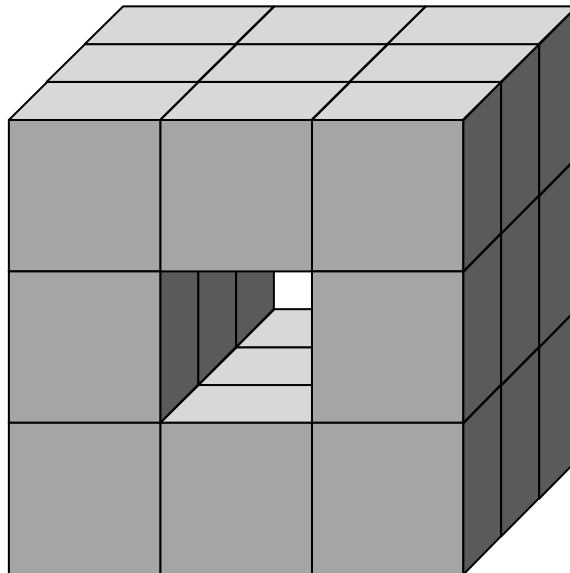


Anteil	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
α					

Aufgabe 6: Würfeltunnel

Aufgabe

Aus 27 kleinen Würfeln mit gleicher Kantenlänge kann man einen großen Würfel zusammensetzen. Der abgebildete Körper entsteht, wenn aus einem solchen großen Würfel eine komplette Reihe kleiner Würfel herausgenommen wird.



Werden weitere kleine Würfel herausgenommen, können zusätzlich noch ein Tunnel von links nach rechts und ein Tunnel von oben nach unten entstehen. Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht dann der Restkörper?

Der Restkörper besteht dann aus _____ kleinen Würfeln.

Lösung

20

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Diese Aufgabe erfordert räumliche Vorstellung (L3). Die Veränderungsprozesse am Würfel sind dem Text zu entnehmen und an Hand der Skizze wiederzuerkennen (K4). Um die Frage nach der Würfel-Anzahl zu beantworten, wird eine geeignete Bestimmungsstrategie (K2) benötigt. In der Regel wird diese entweder auf eine von der Prozess-Vorstellung getragene Subtraktion oder auf ein von der Zielkörper-Vorstellung getragenes systematisches Abzählen

hinauslaufen. Diese Aufgabe stellt für die Schülerinnen und Schüler ein anspruchsvolles Problem dar (AB III).

Ein häufig auftretender **Fehler** wird die Annahme sein, bei jedem Veränderungsschritt würden gleich viele Würfel entfernt. Dieser Irrtum führt zu dem falschen Ergebnis 18. Andere falsche Ergebnisse können durch Irrtümer beim Abzählen oder durch Raten zustande gekommen sein.

Eine sichere **Diagnose** wird nur nach Rücksprache mit den Schülerinnen und Schülern möglich sein.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, könnten auf verschiedenen Anspruchsniveaus gefördert werden. So könnte diese Aufgabe noch einmal bearbeitet werden, diesmal aber mit Hilfsfragen zu den einzelnen Veränderungsschritten:

„Wie viele kleine Würfel werden in diesem Schritt entfernt, wie viele bleiben übrig?“

Wenn das Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler nicht ausreicht, die Aufgabe nur mit Hilfsfragen zu lösen, so kann über das Hantieren mit gegenständlichen Würfeln der räumlichen Vorstellung nachgeholfen werden, z.B. mit einem vorgefertigten festen Modell des Zielkörpers, in das die anderen Würfel lose eingelegt werden.

Eine analoge Aufgabe kann sich auf ein Quadratplattenmuster beziehen, aus dem zunächst eine waagerechte und dann eine senkrechte Reihe zu entfernen und der Vorgang der Verminderung zu beschreiben ist. Falls die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit systematischem Abzählen haben, kann ein abzählendes Hantieren in Verbindung mit einer Beschreibung der gewählten Abzählsystematik hilfreich sein.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können durch weitere Varianten der Umgestaltung von Würfelkörpern gefördert werden.

Beispiele:

- Nachdem aus dem Würfel der Aufgabe „Würfeltunnel“ alle kleinen Mittenwürfel entfernt worden sind, sollen die Ecken „verstärkt“ werden, indem auf jede außen liegende Fläche der Eckenwürfel ein weiterer kleiner Würfel aufgesetzt wird. Wie viele kleine Würfel hat der so hergestellte Körper?
- Ein großer Würfel wird aus kleinen Würfeln zusammengesetzt. Seine Kanten sind viermal so lang wie eine kleine Würfelkante. Nun sollen die außen liegenden kleinen Würfelflächen so eingefärbt werden, dass auf jeder Fläche des großen Würfels ein Schachbrettmuster entsteht. Wie viele kleine Würfel werden dabei schwarz gefärbt?

Im Rahmen der **Differenzierung** können Schülerinnen und Schüler sich auch derartige Aufgaben selbst ausdenken.

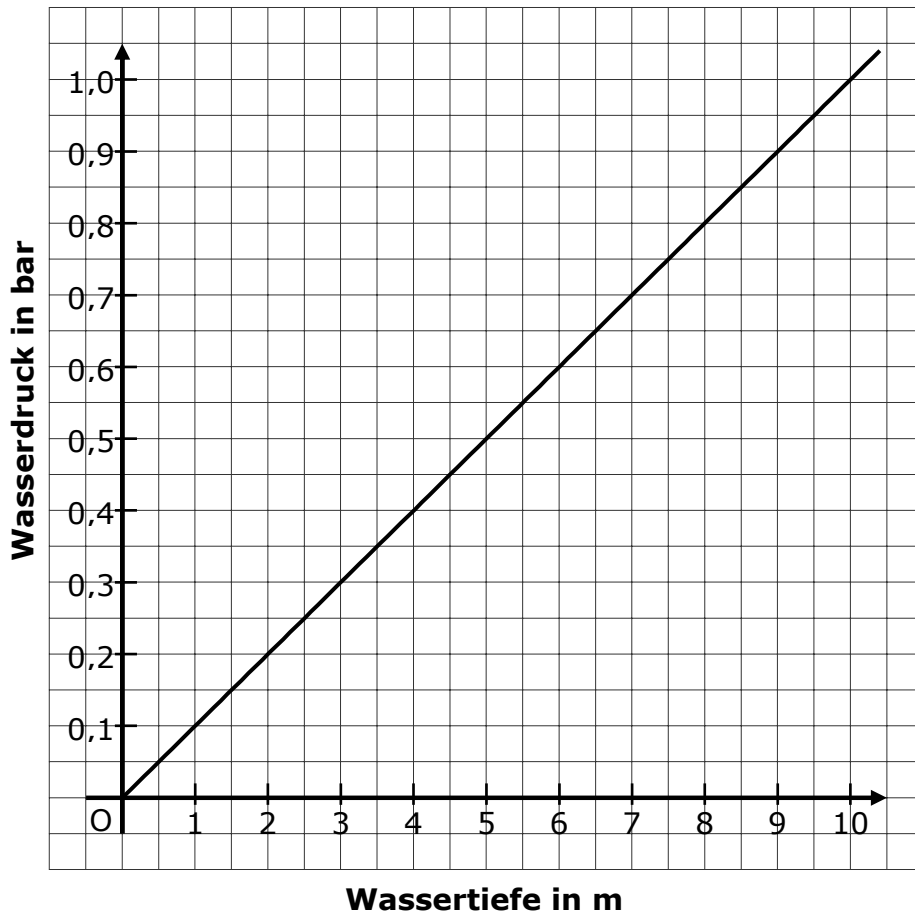
Aufgabe 7: Wasserdruck

Aufgabe

Der Wasserdruck nimmt mit zunehmender Tiefe zu.

Er wird in der Maßeinheit bar angegeben.

Der Zusammenhang zwischen Wasserdruck und Tiefe ist in folgendem Diagramm dargestellt.



- a) In welcher Tiefe beträgt der Wasserdruck 0,6 bar?

In einer Tiefe von _____ m beträgt der Wasserdruck 0,6 bar.

- b) Vervollständige den folgenden Satz.

Wenn sich die Tiefe verdreifacht, dann _____ sich der Wasserdruck.

Lösung 7a

6

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die gefragte Tiefe kann durch Ablesen aus der graphischen Darstellung bestimmt werden (L5, K4). Der zugrunde liegende Zusammenhang ist proportional. Die Schülerinnen und Schüler nutzen die ihnen vertraute Darstellung im Diagramm (AB I).

Folgende **Fehler** können auftreten:

- Nach dem korrekten Ablesen werden durch Flüchtigkeit die Zahlenwerte des geordneten Paares verwechselt, so dass als Lösung 0,6 m notiert wird.
- Es wird ein Wert für die Tiefe geraten.
- Der Wert für die Tiefe wird falsch abgelesen.

Die zugrunde liegenden Probleme können auf zwei Niveaus vorliegen, wobei eine **Diagnose** lediglich mit den Testheft-Lösungen der Schülerinnen und Schüler nicht möglich ist.

Im Fall von grundlegenden Problemen im Umgang mit Diagrammen finden die Schülerinnen und Schüler keinen Ansatz und können daher keine Daten entnehmen.

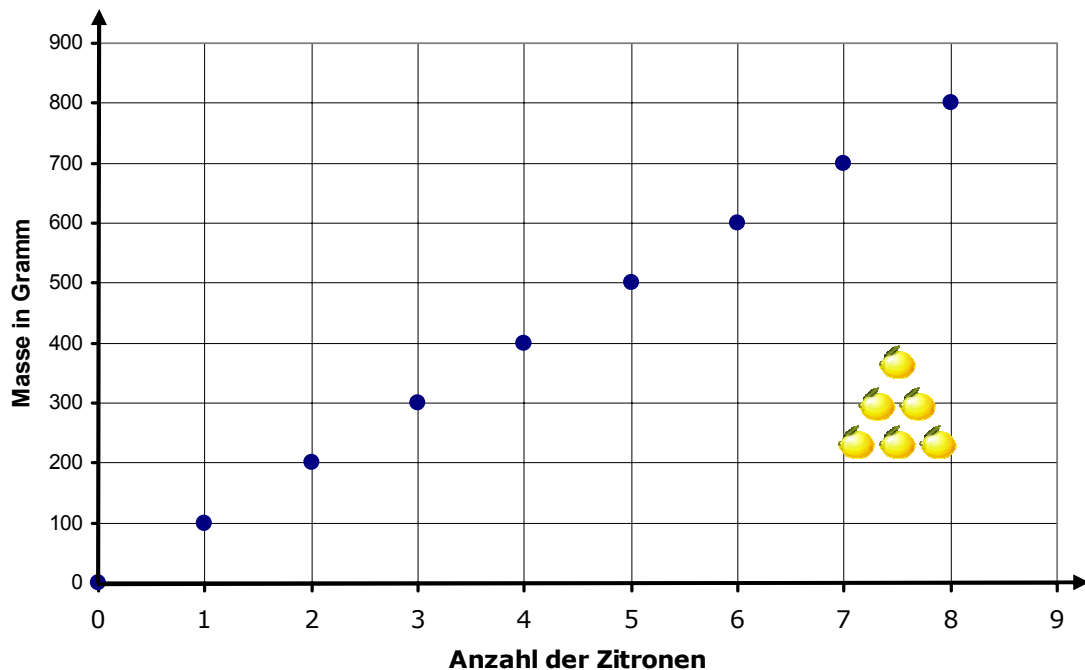
Können die Schülerinnen und Schüler grundsätzlich mit Diagrammen umgehen, kann ein Problem darin bestehen, dass ausgehend von einem Wert der Ordinate der zugeordnete Wert auf der Abszisse bestimmt werden muss, was zunächst eine Orientierung erfordert und ein eher ungewohntes Format darstellen kann.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe hatten, können sich mit den folgenden Aufgaben beschäftigen. Der Sachzusammenhang in diesen Aufgaben ist vertrauter als der Zusammenhang von Wasserdruck und Tiefe und bietet dadurch einen einfacheren Zugang.

Die erste Teilaufgabe erfordert die Zuordnung eines Ordinatenwertes, stellt also die vertrauteste Möglichkeit der Entnahme von Daten dar. Die zweite Teilaufgabe erfordert die Zuordnung eines Abszissenwertes. Hierfür muss sich erst ein Überblick über das Diagramm verschafft werden, um erkennen zu können, wo die gegebene und wo die gesuchte Informationen zu finden ist.

- Folgendes Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen der Anzahl und der Masse bei Zitronen. (Es wird hierbei davon ausgegangen, dass alle Zitronen gleich schwer sind)



- Wie schwer ist eine (drei, ...) Zitrone(n)?
- Für ein Blech mit Zitronenkuchen werden 600 g Zitronen benötigt. Wie viele Zitronen müssen gekauft werden?

Durch den Sachzusammenhang ist es möglich, die Schülerinnen und Schüler handeln zu lassen und mit echten Zitronen zu experimentieren:

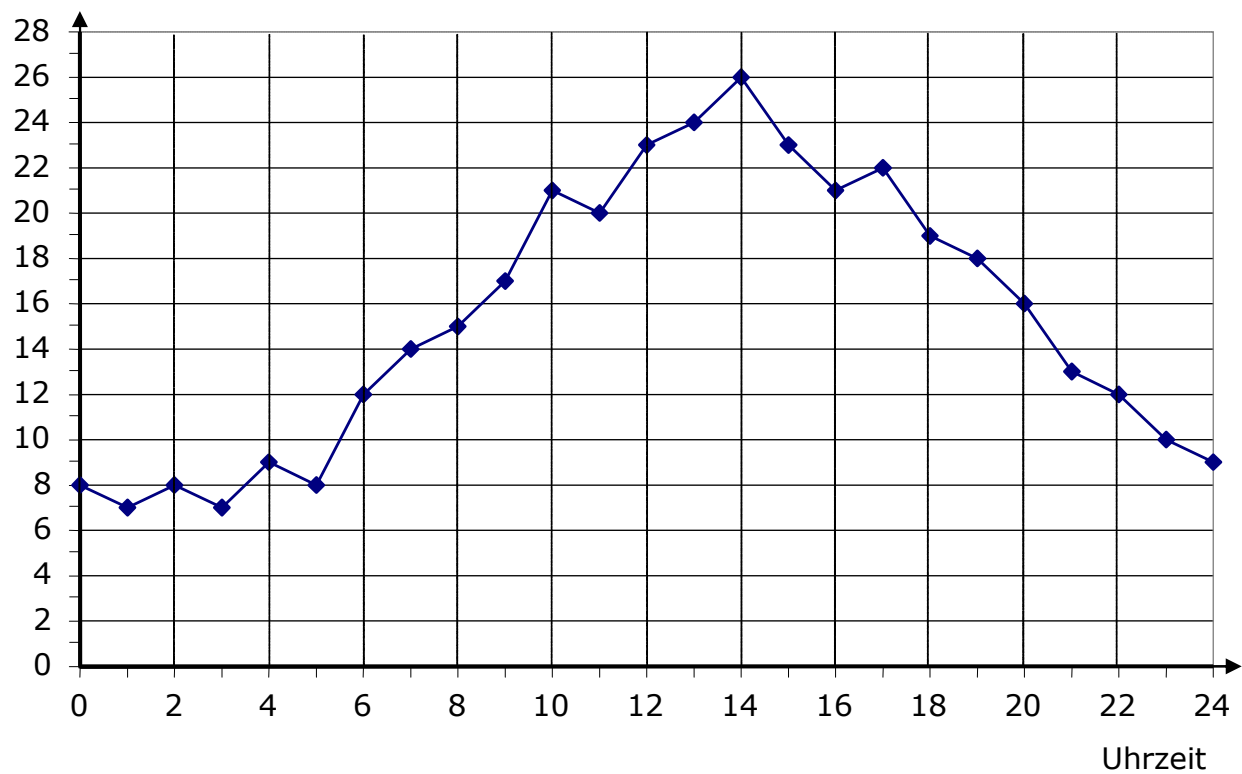
- Wie viel wiegt eine bestimmte Portion?
- Wie viel wird benötigt, um eine bestimmte Masse zu erhalten?

So kann zum einen der grundsätzliche Umgang mit Diagrammen geübt werden, zum anderen aber auch der Aspekt herausgearbeitet werden, dass ein solches Diagramm entweder von den Abszissenwerten zu den Ordinatenwerten oder umgekehrt gelesen werden kann.

Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können mit komplexeren Ableser-Aufgaben gefordert werden.

- In einer Wetterstation wurde einen Tag lang stündlich die Temperatur gemessen und als „Temperaturkurve“ aufgezeichnet.

Temperatur in °C



- Um welche Uhrzeit war die Temperatur am höchsten/niedrigsten?
Gib die Temperaturen und Uhrzeiten an.
- Zu welchen Uhrzeiten wurde eine Temperatur von 12 °C gemessen?

Lösung 7b

verdreifacht

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Für die Bearbeitung der Aufgabe müssen zunächst die notwendigen Informationen aus dem Diagramm entnommen werden (K4). Das erkennbare Realmodell muss in das entsprechende mathematische Modell des proportionalen Zusammenhangs überführt werden (K3, L4). Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II).

Bei der Bearbeitung können folgende **Fehler** auftreten:

- Aufgrund des fehlenden Verständnisses von Diagrammen werden falsche Informationen entnommen.
- Der Begriff „verdreifacht“ wird als „3 addieren“ falsch interpretiert.
- Da das Konzept der Proportionalität noch nicht vorhanden ist, werden die Schülerinnen und Schüler, sofern der Zusammenhang nicht intuitiv erfasst wird, Wertepaare bestimmen und aus diesen den Zusammenhang ableiten. Hierbei können Rechenfehler unterlaufen oder der Zusammenhang nicht erkannt werden.

Eine **Diagnose** ist aufgrund der reinen Lösungsangabe im Testheft wahrscheinlich nicht möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollten ihre Überlegungen im Unterricht verbalisieren.

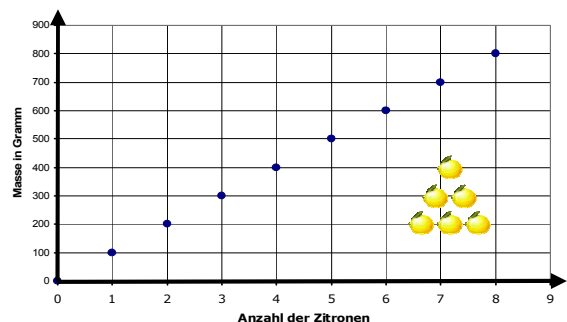
Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe hatten, können mit einer Aufgabe, deren Sachzusammenhang gegenständlicher ist, an proportionale Zusammenhänge herangeführt werden (vgl. Kommentar zur Aufgabe Wasserdruck, Teil a).

- Darian soll für seine Mutter 2 Zitronen kaufen. Im Supermarkt werden aber nur Netze mit 6 Zitronen angeboten. Das Wievielfache an Zitronen muss Darian nun kaufen, wenn er ein Netz mit 6 Zitronen kauft?



- Wenn Darian statt zwei Zitronen sechs Zitronen kauft, wie viel mal mehr wiegen die Zitronen dann?
(Beantworte die Frage mit Hilfe des Diagramms aus Aufgabe a)



Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können durch komplexere Modellierungsaufgaben gefordert werden, wie in /3/ Kommentierungsheft zum Haupttest 2009, Heft C, Aufgabe 12.

Bei der Bearbeitung sollten u. a. auch die Grenzen des Modells der Proportionalität in bestimmten Sachzusammenhängen thematisiert werden.

- Lisa möchte im Garten Sonnenblumen aus Samen selber ziehen. Sie hat schon Erfahrung und rechnet fest damit, dass acht von zehn Samen keimen. Wie viele Samen muss Lisa nach ihrer Erfahrung mindestens säen, damit sie 20 Sonnenblumen erhält?



Aufgabe 8: Zahlenkarten und Zeichenkarten

Aufgabe

Die Abbildung zeigt drei Zahlenkarten und fünf Zeichenkarten.



Lege **alle 8 Karten** so hintereinander, dass du als Ergebnis 88 erhältst.

Lösung

Alle 8 Karten wurden richtig angeordnet. Folgende Lösungen sind möglich.

$$(4 + 7) \cdot 8 =$$

$$(7 + 4) \cdot 8 =$$

$$8 \cdot (7 + 4) =$$

$$8 \cdot (4 + 7) =$$

Das Gleichheitszeichen kann auch als erste Karte liegen.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe verwenden die Schülerinnen und Schüler geeignete heuristische Mittel (K2). Ein möglicher Lösungsansatz kann dabei das systematische Probieren sein, indem sie verschiedene Aneinanderreihungen bilden, um zu dem Ergebnis 88 zu kommen. Sie benötigen grundlegende Fertigkeiten beim Rechnen mit natürlichen Zahlen (L1, K5).

Ein anderer Lösungsansatz ergibt sich, wenn sie die Teiler von 88 bestimmen: $88 = 8 \cdot 11$; $88 = 4 \cdot 22$; $88 = 2 \cdot 44$; $88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$. Sie erkennen, dass nur die Zahlen 8 und 11 mit den rechnerischen Operationen, die auf den Karten zur Verfügung stehen, gebildet werden können.

Zur Lösung müssen mehrschrittige Rechnungen, auch mit Klammern, durchgeführt werden. Deshalb erfolgt eine Zuordnung zum AB II.

Fehler sind zu erwarten, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage sind, die Aufgabenstellung vollständig zu erfassen. Sie probieren nicht systematisch und finden daher die Lösung nicht. Sie nutzen die Kenntnis der Teiler von 88 nicht und erkennen daher nicht die Zahlen 8 und 11 als Summe von 7 und 4, die auf den Zahlenkarten zu finden sind. Es treten Rechenfehler auf.

Zur **Diagnose** von Fehlleistungen sollten die Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, können durch unterschiedliche Aufgabenvariationen erfahren, wie Rechenergebnisse von der Reihenfolge der mathematischen Symbole abhängen.

z.B.: Berechne

- $40 + 5 - 3 \cdot 5$
- $(40 + 5 - 3) \cdot 5$
- $40 + (5 - 3) \cdot 5$ usw.

oder:

Setze die Klammer $()$ an die richtige Stelle in der Aufgabe ein.

- $40 + 5 - 3 \cdot 5 = 50$
- $40 + 5 - 3 \cdot 5 = 30$ usw.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können vergleichbare Aufgaben zum Festigen der Rechenregeln üben.

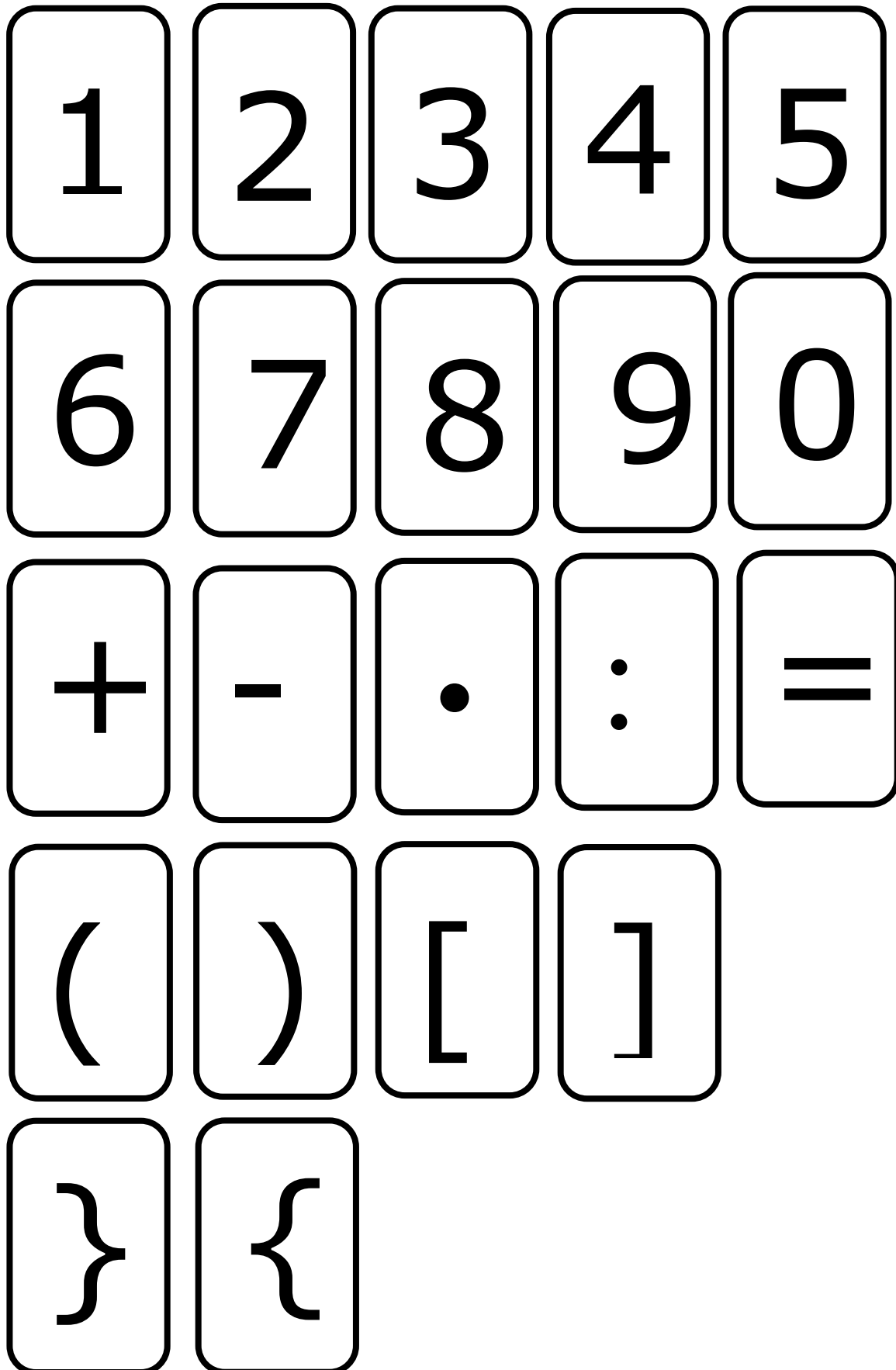
Sie können auch selbst Aufgaben entwickeln und ihren Mitschülerinnen und Mitschülern zum Lösen vorlegen oder mit dem beiliegenden Material üben.

Beispiele:

- Wähle dir 8 Karten aus (3 Ziffernkarten, 5 Zeichenkarten) und lege mit diesen Karten drei verschiedene Aufgaben, die dasselbe Ergebnis haben.
- Lege mit verschiedenen Karten Aufgaben mit dem Ergebnis 7. Finde so viele Varianten wie möglich.

Kartenspiel

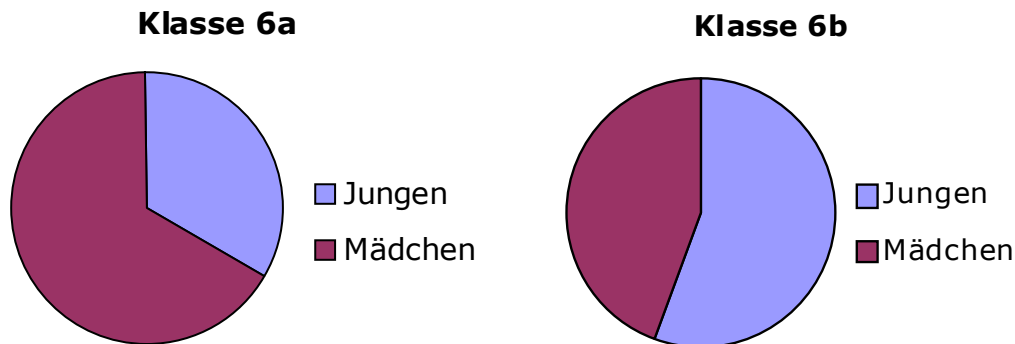
Klebe das Blatt auf Pappe und schneide die Zahlen- und Zeichenkarten aus.
Nun kannst Du unterschiedliche Aufgaben legen und berechnen.



Aufgabe 9: Zwei Klassen

Aufgabe

Die Zusammensetzung zweier Klassen ist in den folgenden Diagrammen dargestellt.



Ina möchte aus den Diagrammen ablesen, in welcher Klasse mehr Kinder sind. Welche Aussage ist richtig? Kreuze an.

- ☐ In der Klasse 6a sind mehr Kinder.
- ☐ In der Klasse 6b sind mehr Kinder.
- ☐ In beiden Klassen sind gleich viele Kinder.
- ☐ In der Klasse 6a sind 5 Kinder mehr.
- ☐ Das kann man aus den Diagrammen nicht ablesen.

Lösung

- ☐ In der Klasse 6a sind mehr Kinder.
- ☐ In der Klasse 6b sind mehr Kinder.
- ☐ In beiden Klassen sind gleich viele Kinder.
- ☐ In der Klasse 6a sind 5 Kinder mehr.
- ☒ Das kann man aus den Diagrammen nicht ablesen.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Interpretation der im Kreisdiagramm dargestellten Daten (L5) erfassen die Schülerinnen und Schüler den Sachverhalt der Darstellungen und beurteilen ihre Aussagekraft (K4).

Sie wissen, dass in einem Kreisdiagramm jeweils das Ganze dargestellt ist. Die absoluten Häufigkeiten sind dabei nicht genannt und daher nicht erkennbar. Die

Schülerinnen und Schüler kommen zu der Erkenntnis, dass die Frage nach der größeren Anzahl der Schüler in einer Klasse nicht beantwortet werden kann (K6), weil der Bezug zum konkreten Ganzen nicht möglich ist.

Die Bearbeitung der Aufgabe ist in AB II einzuordnen, da eine vertraute Darstellung gelesen und unter einem bestimmten Aspekt überprüft und bewertet werden muss.

Folgende Fehler sind zu erwarten:

- Die Schülerinnen und Schüler erfassen die Aufgabenstellung nicht.
- Sie wissen nicht, dass in den Kreisdiagrammen jeweils das Ganze dargestellt ist.
- Sie beachten die Legende nicht (keine Nennung von Anzahlen von Kindern).
- Sie legen gleiche absolute Häufigkeiten (Schüleranzahl der jeweiligen Klasse 6) zugrunde und interpretieren das Diagramm daher falsch.
- Für die Schülerinnen und Schüler scheidet die letzte Wahlmöglichkeit aus, weil sie zunächst davon ausgehen, dass jede Aufgabe lösbar ist.

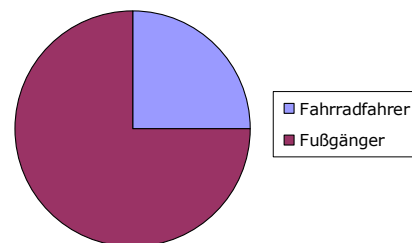
Zur **Diagnose** von Fehlleistungen sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Bearbeitungsstrategie erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten Kreisdiagramme zu ähnlichen Verteilungen besprochen werden (Lieblingsfach, Sportart usw.), z. B.:

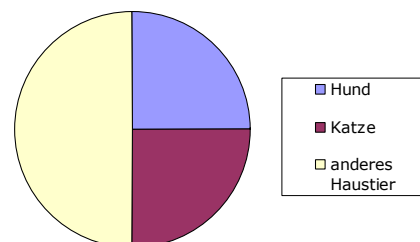
- Das Kreisdiagramm zeigt die Anteile der Kinder der Klasse 6a, die mit dem Fahrrad oder zu Fuß zur Schule kommen.

- a) Welche Informationen kannst du aus dem Diagramm entnehmen?
- b) In die Klasse gehen 20 (24, 28) Kinder. Wie viele Kinder kommen mit dem Fahrrad zur Schule?



- In der Klasse 6b wurden Schüler, die ein Haustier besitzen, befragt. Im Diagramm siehst du die Anteile der Schüler, die einen Hund, eine Katze oder ein anderes Haustier haben. Insgesamt haben 16 Kinder genau ein Haustier.

- a) Wie viele Kinder haben zu Hause einen Hund, wie viele eine Katze und wie viele ein anderes Haustier?
- b) Skizziere das Diagramm für 20 Kinder, die bei gleicher Verteilung genau ein Haustier besitzen.

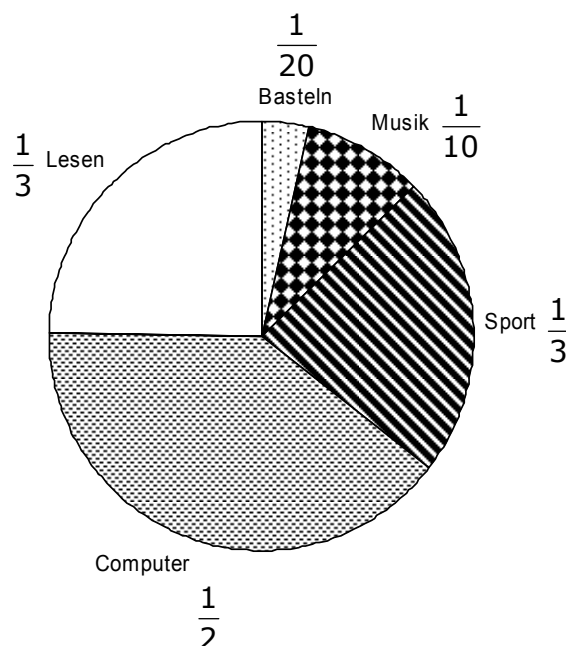


Es können sich Übungen anschließen, in denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig Anteile graphisch darstellen.

- Erstelle ein Diagramm zu folgenden Angaben:
In der Klasse 6c sind 28 Kinder sportlich aktiv. Sie gaben an, dass 14 Kinder Fußball spielen, 7 Kinder Handball spielen und 7 Kinder zum Schwimmen gehen. Kein Kind macht 2 Sportarten.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten folgende Beispielaufgaben bearbeiten:

- Von den 24 Schülerinnen und Schüler einer Klasse erhielten in der letzten Mathearbeit drei Kinder die Note Eins. Sechs Kinder bekamen eine Drei, ebenso viele eine Vier und $\frac{1}{8}$ der Klasse bekam die Note Fünf. Der Rest waren Zweien. Die Note Sechs wurde nicht erteilt.
 - a) Gib in Tabellenform an, wie viele Schüler jeweils welche Note bekamen.
 - b) Stelle den Sachverhalt in einem Kreisdiagramm dar.
- Unten siehst du eine Grafik, die in einer Schülerzeitung nach einer Umfrage zu den Hobbys der Schüler abgedruckt war. Mehrfachnennungen waren möglich.
 - a) Begründe, warum diese Darstellung mathematisch unkorrekt ist.
 - b) Überlege dir, wie man das Ergebnis der Umfrage anders darstellen müsste.
 - c) Fertige ein passendes Diagramm an.



Aufgabe 10: Entscheiden und Begründen

Aufgabe

Sind $\frac{1}{4}$ h, 90 s und 115 min zusammen weniger als 2 Stunden?

- ☐ ja
☐ nein

Begründe deine Entscheidung.

Lösung

Die Entscheidung und die Begründung sind richtig.

Entscheidung: ☐ ja
☒ nein

Begründung:

z. B.

(1) durch Überschlag, auch in Verbindung mit verbalen Formulierungen:

$$2 \text{ h} = 120 \text{ min}$$

Ausgehend von 115 min fehlen nur 5 min.

$$\frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min}$$

Mit nur zwei Summanden werden die 2h bereits überschritten.

(2) durch Rechnung:

$$15 \text{ min} + 1,5 \text{ min} + 115 \text{ min} = 131,5 \text{ min}$$

$$= 2 \text{ h } 11 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$2 \text{ h } 11 \text{ min } 30 \text{ s} > 2 \text{ h}$$

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mathematisch argumentieren (K1) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bilden die Summe vorgegebener Zeitspannen. Dafür ist zunächst mindestens eine Zeitspanne in eine geeignete Maßeinheit umzurechnen (L2, K5). Das Ergebnis muss mit der Vorgabe „2h“ verglichen und eine begründete Entscheidung getroffen werden (K1). Die Begründung kann entweder durch einen Überschlag oder eine exakte Rechnung, auch in Verbindung mit verbalen Formulierungen, erfolgen. Der Lösungsweg ist mehrschrittig (AB II).

Fehler in der Argumentation können auf Rechenfehler, mangelnde Grundvorstellungen bei Zeitangaben und das ungenügende Beherrschen von Umrechnungszahlen zurückzuführen sein. Eine weitere Fehlerquelle stellt der angegebene Bruchteil dar. Ebenso ist es denkbar, dass die Schülerinnen und Schüler die Formulierung „weniger als“ in Verbindung mit den Entscheidungsalternativen „ja“ oder „nein“ missverstehen. Eine **Diagnose** lässt sich in vielen Fällen der schriftlich fixierten Begründung entnehmen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten Beispiele zum Umrechnen von Maßeinheiten der Zeit besprochen und geübt werden, z. B.:

- Rechne um:
 3 Minuten = ... Sekunden
 120 Minuten = ... Stunden
 4 Stunden = ... Minuten
 10 Sekunden = ... Minuten

In derartige Übungen lassen sich leicht einfache Bruchteile einbeziehen, z. B.:

- Gib als Anteil einer Stunde an:
 15 Minuten, 20 Minuten, 45 Minuten

Sind bei den Schülerinnen und Schülern die Vorstellungen über Repräsentanten von Zeitspannen nicht tragfähig genug, kann es hilfreich sein, Vorgängen aus dem täglichen Erfahrungsumfeld Zeitspannen zuzuordnen oder umgekehrt zu vorgegebenen Zeitspannen passende Vorgänge zu suchen.

- Wie lange dauern folgende Vorgänge? Schätze.
 - a) das Toasten einer Scheibe Brot
 - b) das Abspielen deines Lieblingssongs
 - c) dein Schulweg
 - d) ein Augenzwinkern
 - e) deine Hausaufgaben heute Nachmittag
 - f) der Sprung ins Wasser vom 3 m-Brett
 - g) das Anstreichen der Wände deines Zimmers
- Schätze, welche Vorgänge etwa 1 Sekunde, 30 Sekunden, 1 Minute, 30 Minuten, 1 Stunde, 30 Stunden dauern.

Aufgaben zum Addieren von Zeitspannen können sich anschließen:

- Johanna spielt vier Lieder von einer CD ab:
 Wie lange dauert das Abspielen dieser Lieder, wenn zwischen den Liedern
 - a) keine Pause ist?
 - b) jeweils 3 Sekunden Pause sind?

Titel	Spieldauer
Red Rose	2min 53 s
Fading	3 min 29 s
Lean On Me	4 min 15 s
Final Hour	3 min 43 s

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können komplexere Aufgaben, z. B. zu Fahrplänen, bearbeiten.

- Sven will mit dem Zug von Wiesbaden nach Stuttgart fahren. Er hat sich zwei mögliche Verbindungen herausgesucht.

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit	Produkte
Wiesbaden Hbf	Di, 06.10.11	ab 13:39	RB, EC
Stuttgart Hbf	Di, 06.10.11	an 15:53	
Wiesbaden Hbf	Di, 06.10.11	ab 14:24	ICE, IC
Stuttgart Hbf	Di, 06.10.11	an 16:08	

Berechne die Fahrzeit für beide Verbindungen.

Leistungstärkere Schülerinnen und Schüler können auch den Auftrag erhalten, mit Hilfe des Reiseportals der Deutschen Bahn Aufgaben für ihre Mitschülerinnen und Mitschüler zu erarbeiten.

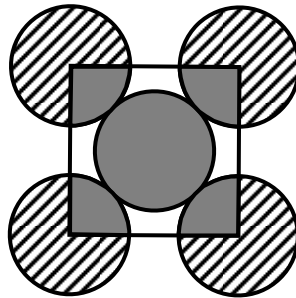
Mögliche Vorgaben für die Aufgabenstellungen können hier sein:

- Berechne die Fahrzeit.
- Berechne die Ankunftszeit.
- Wie lange sitzt der Reisende im Zug? Wie lange wartet er auf Anschlusszüge? (hier: Verbindungen, die mindestens zweimaliges Umsteigen erfordern)
- Welche Verbindung würdest du bei kürzester Fahrtzeit wählen? Begründe deine Entscheidung.

Aufgabe 11: Kreise

Aufgabe

Die Abbildung zeigt fünf Kreise, die alle denselben Radius haben. Die vier äußeren Kreise berühren den inneren. Die Mittelpunkte der vier äußeren Kreise sind die Eckpunkte des Quadrats.



Wie groß ist das Verhältnis des Flächeninhalts der grauen Fläche zum Flächeninhalt der schraffierten Fläche?
Kreuze an.

- ☐ 1 : 4
- ☐ 2 : 3
- ☐ 2 : 5
- ☐ 5 : 4

Lösung

- ☐ 1 : 4
- ☒ 2 : 3
- ☐ 2 : 5
- ☐ 5 : 4

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen das Verhältnis der grauen zu den schraffierten Flächen der Kreise (L1). Dabei verwenden sie auch ihre Vorstellungen von Quadraten und Kreisen (L3) sowie von den Flächeninhalten der betrachteten Teilflächen (L2). Sie entwickeln eine Lösungsstrategie und übertragen das zeichnerisch dargestellte Problem in eine mathematische Sprache (K2). Sie entnehmen aus dem Text und der Grafik Informationen (K6, K4) und erkennen, dass zwei vollständige Kreise grauer Färbung entstehen und drei

vollständige Kreise mit schraffierter Fläche. Aus dieser Überlegung heraus entscheiden sie sich für das Verhältnis 2:3. Die Lösung dieser Aufgabe stellt die Schülerinnen und Schüler vor eine komplexe mathematische Situation, da kein Radius vorgegeben ist, müssen sie allgemeine Betrachtungen anstellen (AB III).

Zu erwartende **Fehler** sind:

- Die Schülerinnen und Schüler erfassen die Aufgabenstellung nicht.
- Die Schülerinnen und Schüler beachten nicht den Hinweis der gleichen Radien der Kreise und erkennen daher nicht die Flächengleichheit der fünf Kreise.
- Sie sind nicht in der Lage, zu erkennen, dass zwei vollständige graue Kreise und drei vollständige schraffierte Kreise entstehen.
- Die Schülerinnen und Schüler können das zeichnerische Problem nicht in mathematische Sprache übersetzen.
- Die Schülerinnen und Schüler können die Anzahl der unterschiedlich gefärbten Kreisflächen nicht in ein Verhältnis setzen.
- Die Schülerinnen und Schüler entscheiden sich für das Verhältnis:
1:4, wenn sie nur die ganzen Kreise betrachten und Teilflächen außer Acht lassen,
2:5, wenn sie die grau gefärbten Flächen mit der Gesamtanzahl der Kreise vergleichen,
5:4, wenn sie die Anzahl der Kreise, die grau gefärbte Teile enthalten, mit der Anzahl der Kreise, die gestreifte Flächen enthalten, vergleichen.
Dabei stellen sie in allen drei Fällen keine konkreten Flächeninhaltsbetrachtungen an.

Zur **Diagnose** können Lösungsschritte im Unterricht genannt und diskutiert werden.

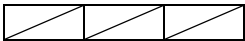
Hinweise zur Weiterarbeit

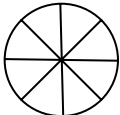
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, können Flächenverhältnisse in vorgegebene Figuren einzeichnen oder zu gegebenen Verhältnissen eigene Figuren zeichnen.

Beispiele:

- Kennzeichne in den Figuren die folgenden Flächenverhältnisse, indem du verschiedene Farben verwendest:

1:4 

2:4 

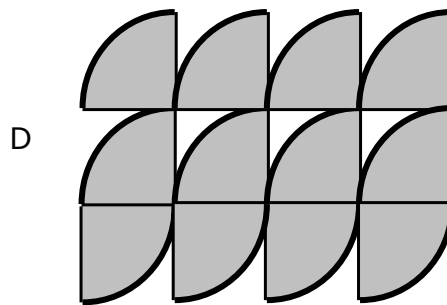
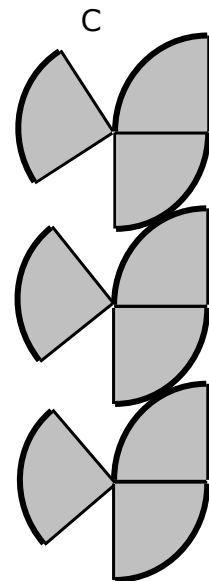
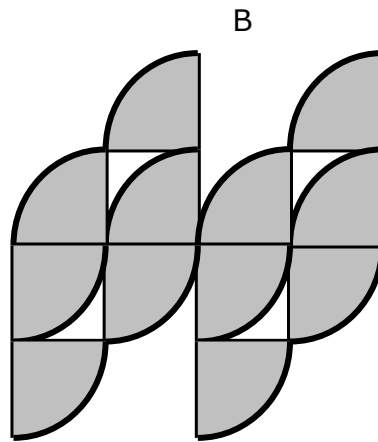
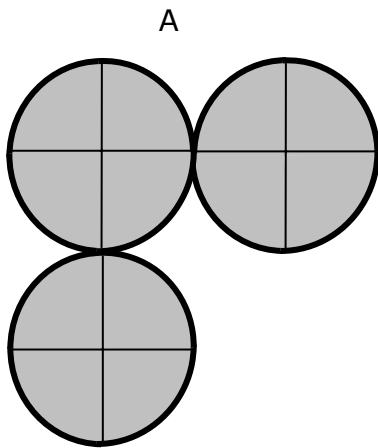
5:3 

- Gegeben ist ein Rechteck mit $a = 2 \text{ cm}$ und $b = 3 \text{ cm}$. Zeichne ein Rechteck mit einem doppelt so großem Umfang.

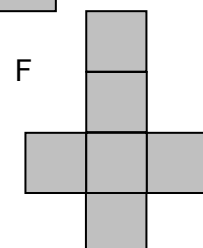
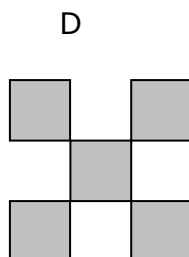
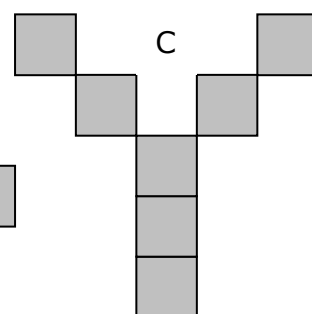
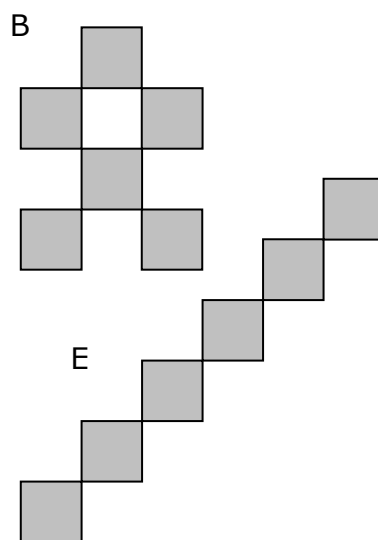
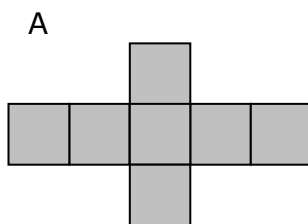
Die Schülerinnen und Schüler können passend zu diesem Item auch Aufgaben zur Zusammensetzung von verschiedenen flächengleichen Figuren bearbeiten.

Beispiele:

- Drei der Figuren A, B, C und D haben denselben Flächeninhalt. Schreibe sie auf.



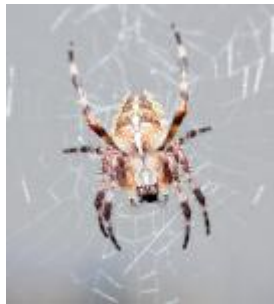
- Je zwei Figuren haben denselben Flächeninhalt. Ordne sie einander zu.



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können weiterführende Aufgaben zu Rechnungen mit Verhältnissen bearbeiten.

z. B.

- Vervollständige die Gleichungen.
a) $6 : 2 = 30 : ?$ b) $12 : ? = 36 : 9$ c) $? : 5 = 60 : 12$
- Der Schmetterling ist im Maßstab 1 : 3 dargestellt. Welche Flügelspannweite hat der Schmetterling in Wirklichkeit?
Die Spinne ist in Wirklichkeit (einschließlich Vorder- und Hinterbeine) 6 cm lang. In welchem Maßstab ist die Spinne dargestellt?
Der Spatz ist in Wirklichkeit 4-mal so groß wie in der Abbildung dargestellt. Bestimme die Körperhöhe in Wirklichkeit.

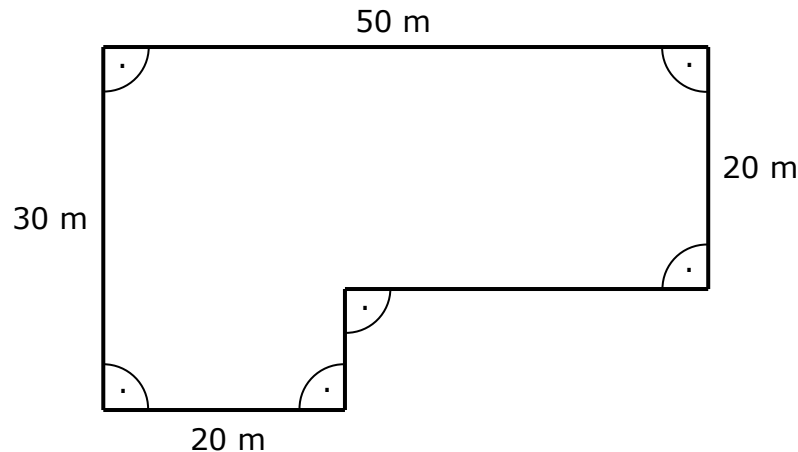


Bilder aus www.pixelio.de, Kategorie: Tiere

Aufgabe 12: Gartengrundstück

Aufgabe

Die Abbildung zeigt die Form und die Abmessungen eines Gartengrundstücks.



Wie groß ist der Umfang des Gartengrundstücks?

Der Umfang des Gartengrundstücks beträgt _____ m.

Lösung

160

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Abbildung Informationen (K4), bestimmen die fehlenden Seitenlängen (K2) und berechnen anschließend durch Addition aller Seitenlängen den Umfang (L2, K5, AB II). Rationeller können sie rechnen, wenn sie erkennen, dass durch Verschieben der unbekannten Seitenlängen ein Rechteck entsteht, welches den gleichen Umfang hat wie das Gartengrundstück [$2 \cdot 50 \text{ m} + 2 \cdot 30 \text{ m}$ oder $(50 \text{ m} + 30 \text{ m}) \cdot 2$] (K2).

Die Angabe 120 deutet auf den **Fehler** hin, dass Schülerinnen und Schüler nur die beschrifteten Seitenlängen addiert haben. Nicht erkennbar ist, ob sie die fehlenden Seitenlängen nicht bestimmen konnten oder diese nicht beachtet haben. Sollte nur eine der fehlenden Größen ermittelt worden und in die Rechnung eingegangen sein, wäre als Ergebnis 150 oder 130 zu erwarten.

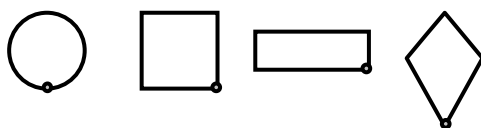
Möglich ist auch die Verwechslung mit der Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks ($50 \cdot 30 = 1500$) oder als Summe rechteckiger Teilflächen ($20 \cdot 50 + 20 \cdot 10 = 1200$ bzw. $20 \cdot 30 + 30 \cdot 20 = 1200$). Eine weitere Fehlerquelle wäre auch die Umfangsberechnung von Teilrechtecken mit anschließender Addition, erkennbar am Ergebnis 200.

Hinweise zur Weiterarbeit

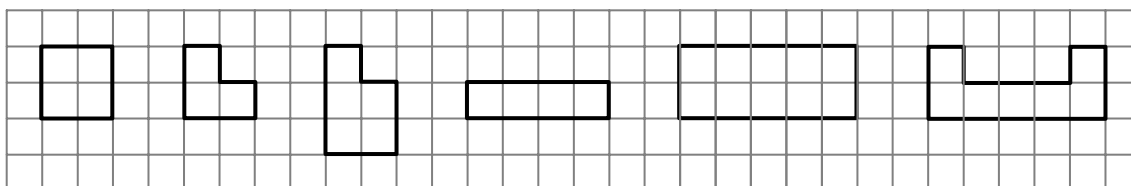
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten den Umfangsbegriff in vielfältiger Weise verinnerlichen. Ausgehend von Gegebenheiten aus ihrer Erfahrungswelt (wie Hüftumfang beim Hosenkauf, Randleimer um einen Tisch, Einzäunung von Tiergehegen oder Grundstücken, Fußbodenleisten im Kinderzimmer) sollten sie lernen, dieses Problem zu mathematisieren.

Sie könnten aufgefordert werden, mit einer bestimmten Anzahl von Legestäbchen verschiedene Figuren zu legen, wobei sie erkennen sollten, dass alle aus gleich vielen Stäbchen gelegten Figuren den gleichen Umfang haben. Der Umfang wird zunächst als Anzahl der Stäbchenlängen angegeben, was bei bekannter Länge (z. B. 10 cm) auch in Zentimeter umgerechnet werden könnte. Zur Vertiefung des Umfangsbegriffes könnten die Schülerinnen und Schüler z. B. folgende Aufgaben erhalten:

- Aus jeweils einem Meter Draht wurden Figuren gebogen:

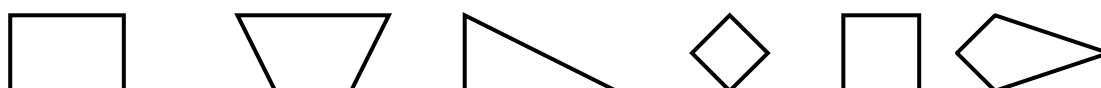


- Begründe, dass jede dieser Figuren den gleichen Umfang hat.
- Aus einem Draht mit einer Länge von 1 m soll ein Rechteck gebogen werden. Der Draht soll dabei ohne Überlappung vollständig verwendet werden.
 - a) Wie lang und wie breit könnte ein solches Rechteck werden?
 - b) Gib mindestens drei verschiedene Möglichkeiten an und kontrolliere diese durch Rechnung.
- Bestimme den Umfang der Figuren in Kästchenlängen.



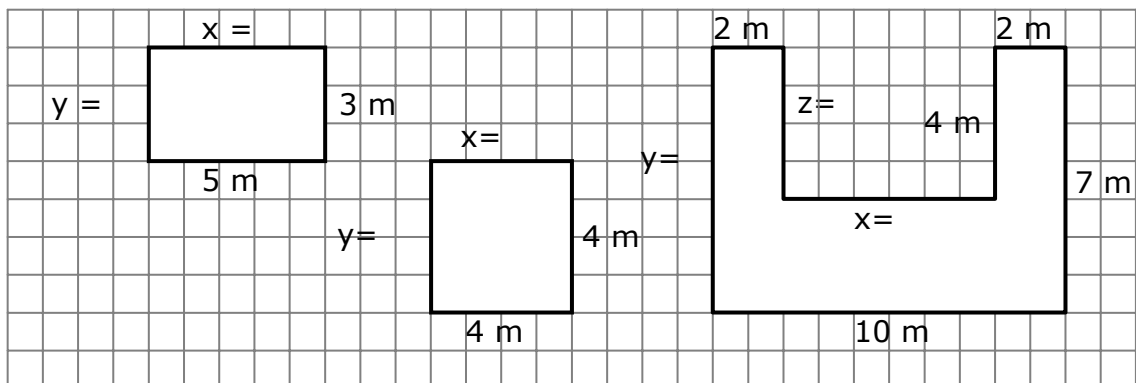
Verallgemeinernd könnten die Schülerinnen und Schüler in weiteren Übungen die Erkenntnis anwenden, dass sich bei n-Ecken der Umfang als Summe aus den Seitenlängen ergibt, z. B.:

- Miss die Seitenlängen und bestimme den Umfang der Figuren.



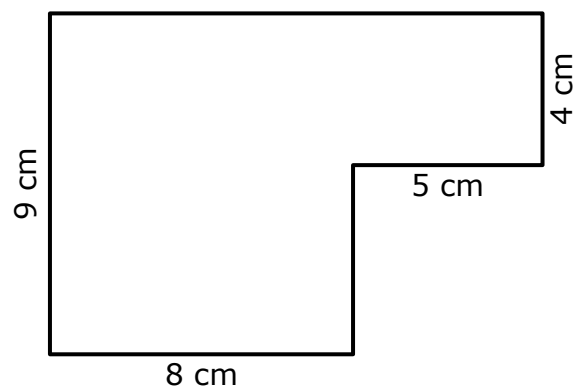
Zur Vorbereitung der Arbeit mit bemaßten Zeichnungen ist die folgende Aufgabenstellung geeignet:

- Bestimme die fehlenden Maße.



Sie greift vor allem den Aspekt auf, dass in Zeichnungen oft nur die unbedingt notwendigen Maße angegeben sind, nicht jedoch diejenigen die sich durch Addition bzw. Subtraktion leicht ermitteln lassen.

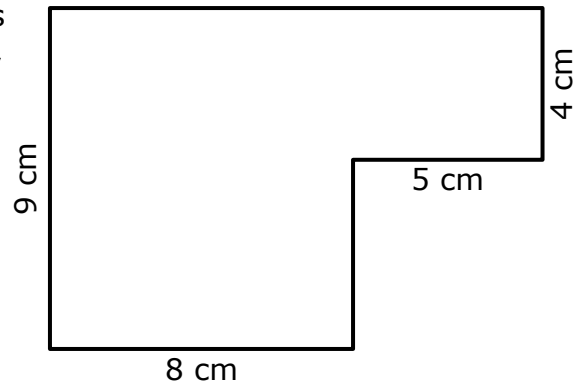
- Berechne den Umfang der aus Rechtecken zusammengesetzten Figur.



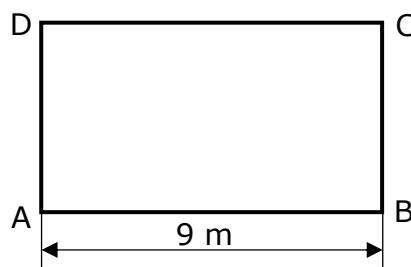
Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, sind Aufgaben geeignet, die die Kenntnisse der Eigenschaften von Vierecken sowie die Umfangs- und Flächenberechnung von Rechtecken in Anwendungen fordern, z. B.:

- Reichen 100 m Maschendrahtzaun zum Einzäunen eines rechteckigen Grundstückes (Länge 30 m, Breite 15 m), wenn man für die Tür mit einer Breite von einem Meter rechnet? Fertige eine Skizze an und begründe durch Rechnung.
- Sind die folgenden Aussagen wahr? Begründe deine Entscheidung.
 - „Wenn alle Seitenlängen eines Quadrates verzehnfacht werden, dann wird der Umfang 40 - mal so groß, denn das Quadrat hat 4 Seiten und $4 \cdot 10 = 40$.“
 - „Wenn sich der Umfang eines Rechtecks verdoppelt, dann verdoppelt sich immer auch sein Flächeninhalt.“
- Wie verändert sich der Umfang eines Quadrats (Rechtecks), wenn sich seine Seitenlängen verdoppeln, verdreifachen ... ?

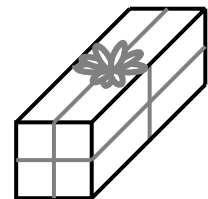
- Wie verändert sich der Umfang der aus Rechtecken zusammengesetzten Figur, wenn die angegebenen Maße jeweils um 1 cm verlängert werden?



- Siehe auch /4/ Kompetenztest Mathematik Klasse 6; 2005, Aufgabe 8: Das Rechteck ABCD (siehe Skizze) hat einen Flächeninhalt von 45 m^2 . Wie groß ist der Umfang des Rechtecks ABCD?



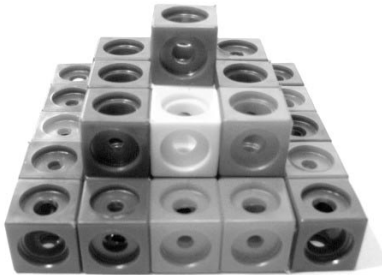
- Du willst ein Geschenk für einen Freund in einem Karton mit den Maßen 10 cm, 10 cm und 30 cm verpacken. Es soll mit einem Band (siehe Bild) verschnürt werden, für die Schleife wird ein halber Meter gebraucht. Berechne, wie viele Meter Band insgesamt notwendig sind.



Aufgabe 13: Würfelkörper I

Aufgabe

Aus wie vielen Würfeln besteht der abgebildete pyramidenförmige Körper?
Kreuze an.



- ☐ 21 Würfel
- ☐ 28 Würfel
- ☐ 35 Würfel
- ☐ 37 Würfel
- ☐ 42 Würfel

Lösung

- ☐ 21 Würfel
- ☐ 28 Würfel
- ☒ 35 Würfel
- ☐ 37 Würfel
- ☐ 42 Würfel

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Darstellung die Anordnung der Würfel (K4) und erkennen den Aufbau des pyramidenförmigen Würfelkörpers mit quadratischer Grundfläche (L3). Die Anzahl der Würfel kann durch systematisches Zählen oder durch Rechnung ermittelt werden. Es bietet sich an, die Würfelanzahl pro Schicht zu bestimmen und die Summe $25 + 9 + 1$ zu bilden. Das Verfahren zur Lösung ist mehrschrittig (AB II)

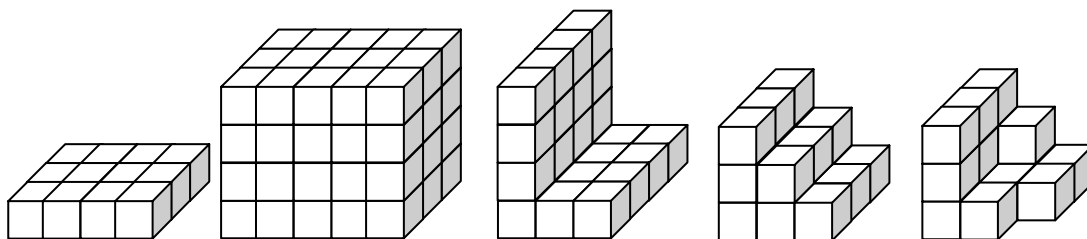
Fehler können dadurch entstehen, dass die nicht sichtbaren Würfel des pyramidenförmigen Würfelkörpers nicht gedanklich ergänzt werden. Wenn ausschließlich die sichtbaren Würfel gezählt werden, führt dies zum Ankreuzen des Distraktors „21 Würfel“. Für alle anderen möglichen Ergebnisse, die auf fehlenden gedanklichen Ergänzungen beruhen, werden keine Distraktoren angeboten. Falsche Ankreuzungen lassen sich deshalb in vielen Fällen auf mangelnde Grundvorstellungen zurückführen, die verhindern, dass die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen den einzelnen Würfeln und dem Gesamtkörper erkennen. Dies kann auch dazu führen, dass keines der angebotenen Ergebnisse angekreuzt wird.

Eine **Diagnose** der Fehler kann nur im Unterrichtsgespräch erfolgen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollte Gelegenheit gegeben werden, Körper aus Würfeln selbst zu bauen, um so grundlegende Strukturvorstellungen zu schulen. Zur Vertiefung und Dokumentation kann es hilfreich sein, die gebauten Würfelkörper zeichnen zu lassen. Es können sich Aufgaben anschließen, in denen analog zur Testaufgabe Würfelanzahlen bestimmt werden.

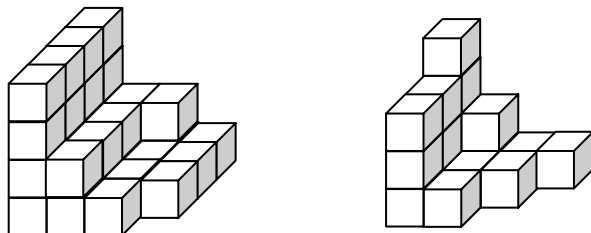
- Bestimme die Anzahl der Würfel im abgebildeten Körper.



Mit welcher Progression der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgaben gesteigert wird, hängt von der Lerngruppe ab.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können Aufgaben mit gesteigerten Anforderungen zum Aufbau von Körpern bearbeiten.

- Es soll ein großer Würfel entstehen. Vier kleine Würfel bilden eine Kante. Wie viele kleine Würfel müssen noch hinzugefügt werden?

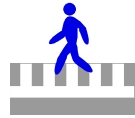


Weiter könnte diesen Schülerinnen und Schülern der Auftrag erteilt werden, Übungsaufgaben für ihre Mitschülerinnen und Mitschüler zu erstellen. Hier kann es sinnvoll sein, die Anzahl der zu verwendenden kleinen Würfel oder die Form des zu erstellenden Körpers vorzugeben.

Aufgabe 14: Fußgängerüberweg

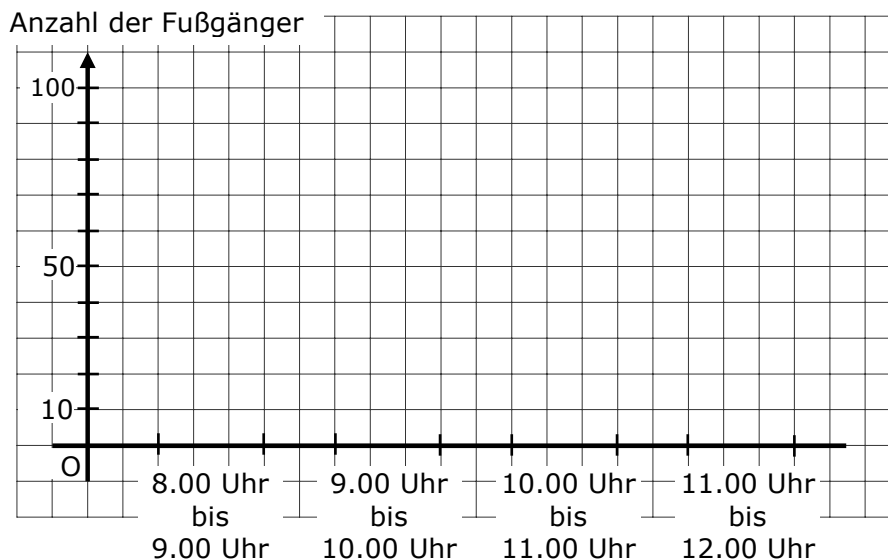
Aufgabe

Auf einem Fußgängerüberweg wurden an einem Vormittag die Fußgänger gezählt. Die Ergebnisse sind mit Hilfe von Symbolen dargestellt worden, wobei  für jeweils 10 Fußgänger steht.



8.00 bis 9.00 Uhr:	       
9.00 bis 10.00 Uhr:	     
10.00 bis 11.00 Uhr:	    
11.00 bis 12.00 Uhr:	       

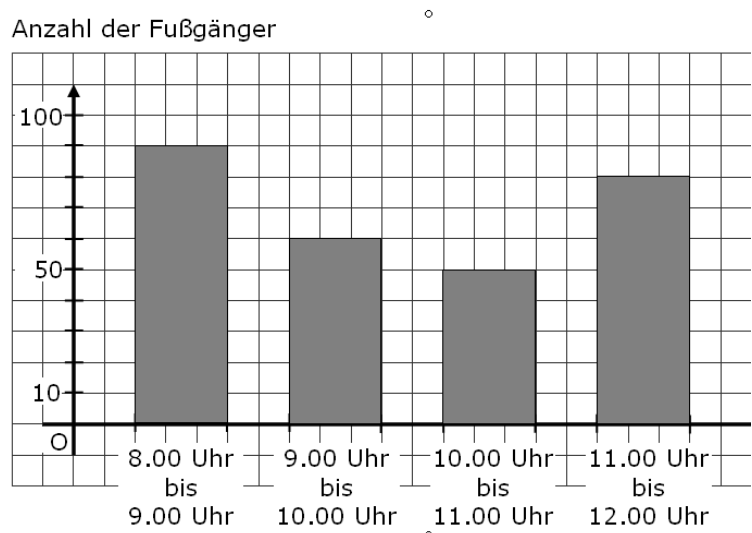
Stelle den Sachverhalt in einem Säulendiagramm dar.



Lösung

Richtige, vollständige Darstellung:

Die Breite, bzw. Füllung der Säulen wird in der Bewertung nicht berücksichtigt.



Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen einer graphischen Darstellung (Bildtdiagramm) die Ergebnisse einer statistischen Erhebung (K4). Dafür verwenden sie zusätzlich im Text vorgegebene Informationen (L5, K6). Mit diesen Ergebnissen wird ein Säulendiagramm in der Vorlage erstellt. Sie wechseln von einer Art der graphischen Darstellung zu einer anderen (K4, AB II).

Fehler treten auf, wenn Schülerinnen und Schüler nicht wissen, was ein Säulendiagramm ist, nicht beachten, dass das Symbol für 10 Fußgänger steht, sich ver zählen oder im Diagramm die vorgegebene Achseneinteilung nicht richtig nutzen.

Hinweise zur Weiterarbeit

An die Interessen und die Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler angelehnt, könnten im Unterricht viele Möglichkeiten für statistische Erhebungen genutzt werden. Zum Beispiel eignen sich Themen wie:

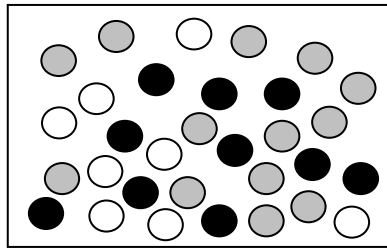
- Lieblingsfarbe,
- Themenkreis gesundes Frühstück,
- Verkehrsmittel für den Schulweg,
- Fernsehzeit,
- Zeiten für Computerspiele,
- Teilnahme an der Schulspeisung,
- Wasserverbrauch.

Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler lernen, beim Auszählen effektiv vorzugehen, z. B. sind Tabellen und Stichlisten zu empfehlen. Sie sollten verschiedene Möglichkeiten (Anfertigen von Tabellen, Säulendiagrammen, Steifendiagrammen, Kreisdiagrammen, Bildtdiagrammen) üben, die Ergebnisse statistischer Erhebungen darzustellen. Das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen verstärkt den Übungseffekt. Auch Beispiele von statistischen Erhebungen aus der Tagespresse, Zeitschriften, o. ä. könnten zum Entnehmen von Informationen genutzt werden.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten Auszählübungen durchgeführt, das Lesen von Bildtdiagrammen und das Zeichnen von Säulendiagrammen geübt werden.

Beispiele:

- Zähle aus, wie viele Punkte von jeder Farbe auf dem Bild zu sehen sind.
Fertige eine Strichliste an.

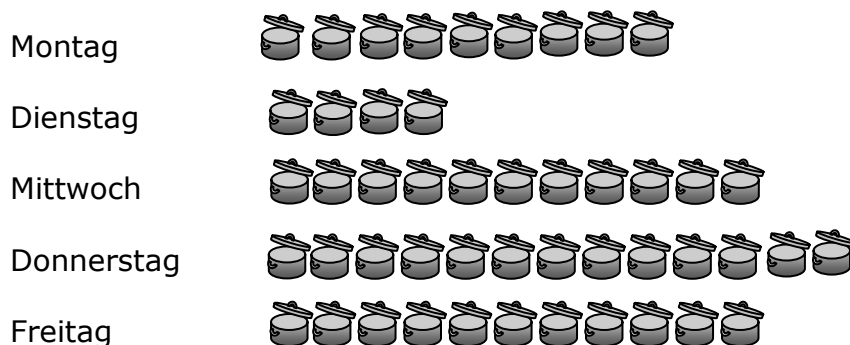


Farbe	Strichliste	Anzahl

- Das Diagramm zeigt die Teilnehmer am Schulessen unserer Schule.
Wie viele Teilnehmer am Schulessen waren es an den einzelnen Wochentagen?



= 5 Essen



Werden diese Tätigkeiten beherrscht, können die Schülerinnen und Schüler selbst Darstellungen anfertigen.

- Auf die Frage nach ihrer Lieblingsfarbe antworteten die Kinder:

Farbe	Anzahl der Kinder
Rot	250
Blau	300
Pink	200
Grün	150

- Stelle dieses Umfrageergebnis in einem Bilddiagramm dar.
Benutze ☺ für jeweils 50 Kinder
- Fertige ein Säulendiagramm an.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten sich mit komplexeren Datenerhebungen auseinandersetzen. Es könnten zu Umfragen (z. B. zur gesunden Ernährung), die in der Schule ausgeführt wurden, selbständig die ausgefüllten Fragebögen ausgezählt und anschließend diese Ergebnisse zur Veröffentlichung im Schulgebäude graphisch dargestellt werden.

Aufgabe 15: Seillänge

Aufgabe

Jonas erzählt:

"Ich habe ein langes Seil gefunden und es in der Mitte durchgeschnitten. Die eine Hälfte habe ich weggelegt. Vom Rest habe ich ein Drittel abgeschnitten. Dieses Drittel war genau 4 m lang."

Wie lang war das Seil? Begründe.

Das Seil war _____ m lang.

Begründung:

Lösung

Richtiges Ergebnis **und** richtige, vollständige Begründung

Ergebnis: 24

Begründung:

z.B.: (1) $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$

Wenn $\frac{1}{3}$ der Hälfte 4 m lang ist, war das gesamte Seil

$4 \text{ m} \cdot 6 = 24 \text{ m lang.}$

- (2) Das Seil ist 24 m lang.
Die Hälfte des Seils ist 12 m lang.
Ein Drittel davon ist 4 m lang.



- (4) ...

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erfassen die Formulierungen „Mitte“, „Hälfte“ und „vom Rest ... ein Drittel“ und erstellen daraus ein mathematisches Modell der gegebenen Realsituation (L1, K3).

Die geforderte Argumentation (K1) ist für Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe komplex (AB III) und kann auf unterschiedliche Arten erfolgen.

- Ein Drittel von der Hälfte ist ein Sechstel vom Ganzen. Wenn ein Sechstel vom Ganzen 4 m entspricht, dann ergibt sich das Ganze als $6 \cdot 4 \text{ m} = 24 \text{ m}$ (K5).
- Ein Drittel von der Hälfte entspricht 4 m. Folglich ist ein Drittel vom Ganzen 8 m und das Ganze $3 \cdot 8 \text{ m} = 24 \text{ m}$ (K5).
- Ein Drittel von einem Halben ist 4 m, das Halbe demnach $3 \cdot 4 \text{ m} = 12 \text{ m}$ und das Ganze $2 \cdot 12 \text{ m} = 24 \text{ m}$ (K5).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler keine passende Bearbeitungsstrategie für diese Aufgabe finden. Weitere Fehler können ihre Ursache in Schwierigkeiten beim Erfassen des Aufgabentextes oder im Fehlen Sinn tragender Vorstellungen von gebrochenen Zahlen haben. Geben Schülerinnen und Schüler als Ergebnis 12 m an, so deutet das darauf hin, dass sie in ihrer Rechnung nur die Hälfte des Seiles berücksichtigten.

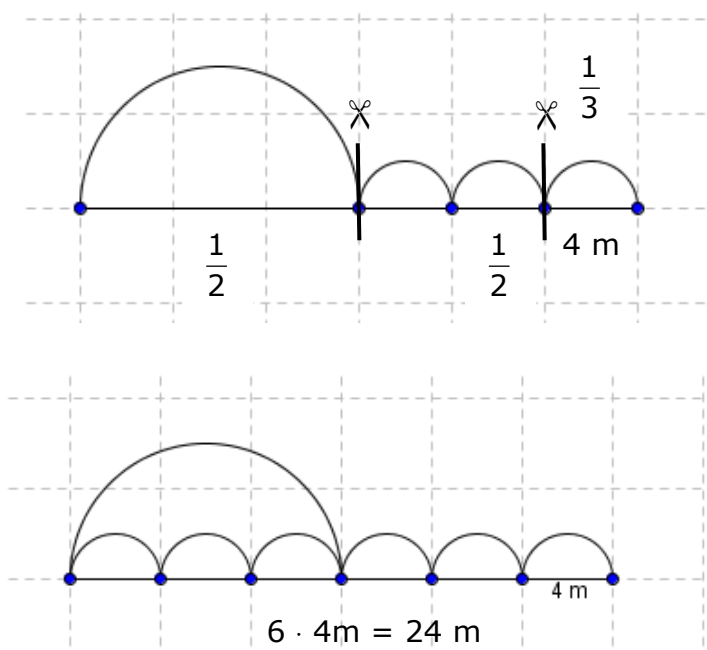
Für eine **Diagnose** ist die Auswertung der Schülernotizen im Testheft hilfreich. Auftretende Fehler können auch im Unterricht besprochen werden, nachdem die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsversuche dargelegt haben.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten Hilfen angeboten werden, wie man bei der Analyse derartiger Sachverhalte vorgehen kann. Zur Unterstützung können z. B. folgende Aufforderungen dienen:

- Formuliere die Aufgabenstellung mit eigenen Worten.
- Markiere im Text Wörter, die du nicht verstanden hast.
- Übersetze den Text in Bilder (Tabellen, Skizzen, ...).

Die Übersetzung in ein mathematisches Modell sollte schrittweise nachvollzogen und über bildliche Darstellungen des Sachverhaltes veranschaulicht werden.



Die Schülerinnen und Schüler können danach angeregt werden, ähnliche Aufgabenstellungen zu veranschaulichen und zu lösen, wie:

- Anna löst die Hälfte ihrer Aufgaben allein. Bei der Hälfte der restlichen Aufgaben hilft ihr der Vater. Es bleiben noch 3 Aufgaben übrig. Wie viele Aufgaben soll Anna lösen?
- Ein Drittel seines Taschengeldes gibt Tim für sein Handy aus. Die Hälfte vom Rest spart er regelmäßig. Es bleiben ihm noch 5 € zur freien Verfügung. Wie viel Taschengeld bekommt Tim?

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, ist die Bearbeitung von Aufgabenstellungen mit höherem Schwierigkeitsgrad (Zahlenwerte, notwendige Bearbeitungsschritte, selbstständige Formulierung der Fragestellung) möglich.

- Anna löst ein Drittel ihrer Aufgaben allein. Bei einem Viertel der restlichen Aufgaben hilft ihr Vater. Es bleiben noch 3 Aufgaben übrig.
Formuliere eine Frage dazu und beantworte sie.
- Ein Fünftel seines Taschengeldes gibt Tim für sein Handy aus. Die Hälfte vom Rest spart er regelmäßig. Es bleiben ihm noch 5 € zur freien Verfügung.
Formuliere zwei Fragen, die du mit den Angaben des Textes beantworten kannst.

Aufgabe 16: Symmetrie

Aufgabe

Achsensymmetrie gibt es auch bei manchen Buchstaben oder Wörtern.

Untersuche das folgende Wort auf Achsensymmetrie. Zeichne alle Symmetrieachsen ein.

OHO

Lösung

Die beiden Symmetrieachsen des Wortes wurden richtig eingezeichnet.

OHO

Weitere Symmetrieachsen der vorkommenden Buchstaben werden nicht berücksichtigt.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen das abgebildete Wort auf Achsensymmetrie (L3, K4) und zeichnen alle Symmetrieachsen ein. Sie müssen dabei sowohl auf Symmetrien der Buchstaben als auch auf Symmetrie in der Anordnung der Buchstaben achten (AB II). Sie erkennen, dass jeder Buchstabe zwei Symmetrieachsen hat, wovon die jeweils waagerechte Symmetrieachse auch für das Wort insgesamt zutrifft. Die zweite Symmetrieachse des Wortes finden sie, wenn sie erkennen, dass die Wortmitte genau auf der senkrechten Symmetrieachse des Buchstaben H liegt.

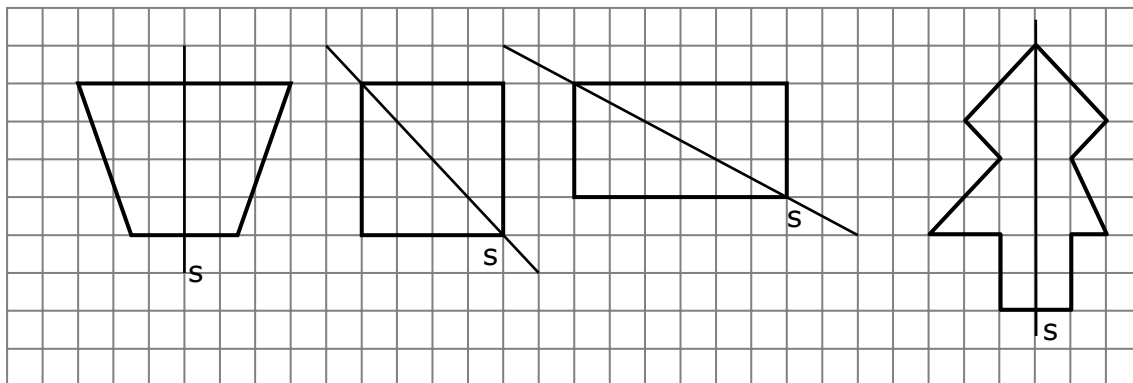
Wird nicht erfasst, dass sich die Untersuchung der Achsensymmetrie auf das ganze Wort bezieht, kann das zu dem **Fehler** führen, dass alle Symmetrieachsen der Buchstaben eingezeichnet werden: 

Hinweise zur Weiterarbeit

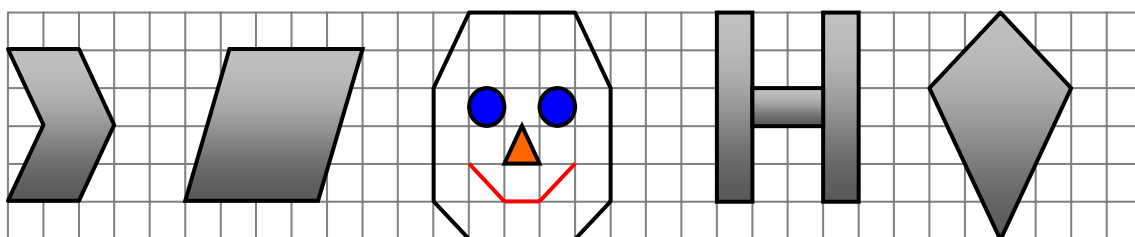
Bevor sich **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, mit der Achsensymmetrie von Worten beschäftigen, sollte der Begriff Achsensymmetrie an vielfältigen einfachen Beispielen gefestigt werden. Sie

sollten Methoden zur Erkennung, sowie zur Herstellung von achsensymmetrischen Figuren üben und wissen, wie Figuren auf Achsensymmetrie zu prüfen sind. Geeignete Übungsaufgaben sind z.B.:

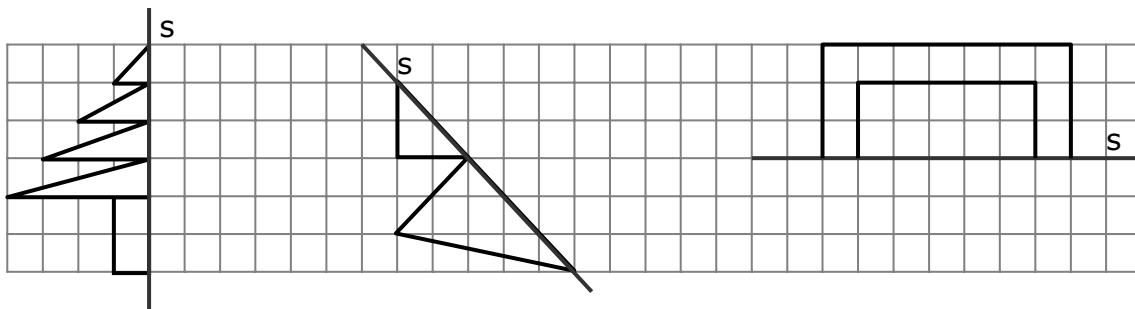
- Prüfe, ob die Gerade s Symmetrieachse der Figur ist.



- Untersuche, ob diese Figuren achsensymmetrisch sind. Wenn ja, zeichne alle Symmetrieachsen ein.



- Ergänze zu einer achsensymmetrischen Figur mit der Symmetrieachse s .

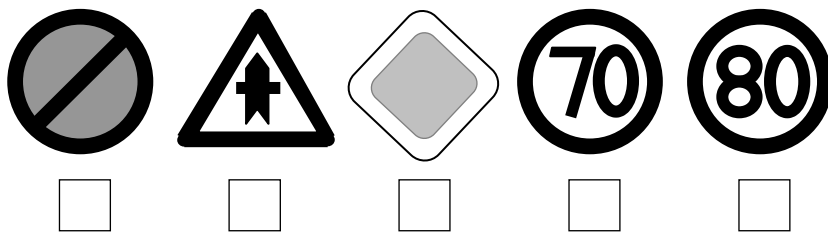


In Kombination mit den Eigenschaften von Dreiecken oder Vierecken kann die Suche nach Symmetrieachsen auch das Verständnis dieser Figuren verstärken.

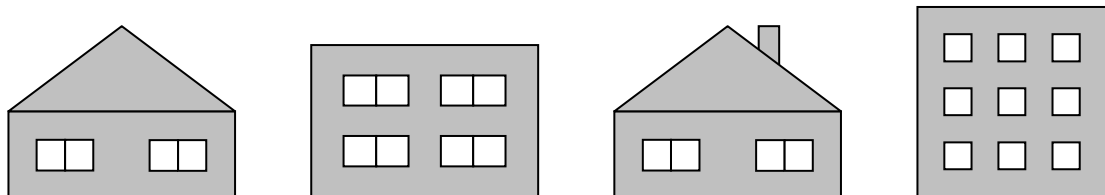
Bild des Dreiecks					
Anzahl der Symmetrieachsen					

Es ist darauf zu achten, dass auch Figuren betrachtet werden, bei denen die Gestaltung der Fläche mit in die Symmetrieuntersuchung einzubeziehen ist. (siehe auch /4/ Kompetenztest Mathematik Klasse 6; 2003, Aufgabe 1 oder 2005 Aufgabe 1)

- Gib für jedes Verkehrszeichen die Anzahl der Symmetrieachsen an.



- Zeichne in jede Hausfassade alle Symmetrieachsen ein.

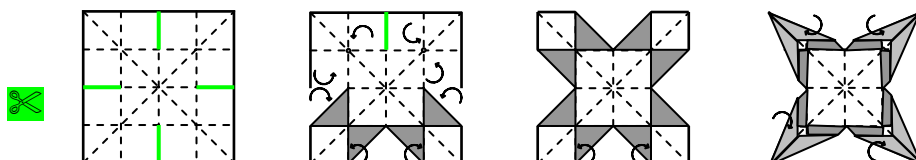


Eine Übertragung des Symmetriegedankens auf Worte, Sätze oder Zifferngruppen wird mit der Bearbeitung von Palindromen möglich. Palindrome sind Zeichnkette, die von vorn und von hinten gelesen gleich bleiben.

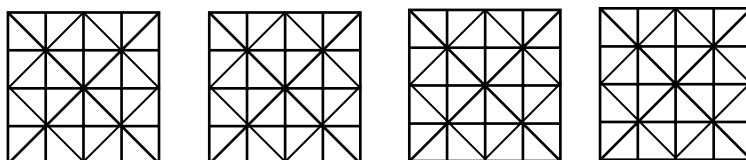
- Beispiele: 243342 und 6006 / OTTO/ REITTIER/ EIN ESEL LESE NIE.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten sich mit komplexeren Aufgabenstellungen auseinandersetzen, wie:

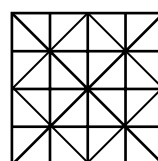
- Ein quadratisches Stück Papier wird wie abgebildet eingeschnitten und zu einem Stern gefaltet. Kontrolliere, ob der Stern genauso viele Symmetrieachsen hat wie das ursprüngliche Quadrat.



- Gestalte diese Musterfigur mit Farben so, dass sie unter Berücksichtigung der Farben
keine eine zwei vier Symmetrieachsen hat.

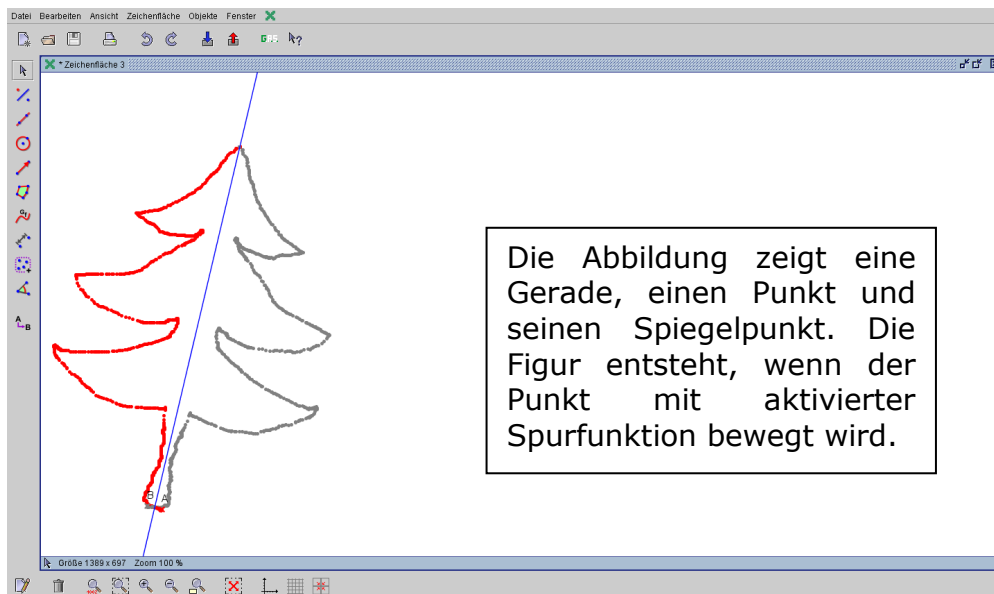


Ist es möglich die Figur so zu färben, dass es drei Symmetrieachsen gibt?



Die Erzeugung von achsensymmetrischen Figuren ist auch mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware möglich.

- Beispiel:



Aufgabe 17: Gewichtige Rechnung

Aufgabe

Ergänze die Lücke, so dass die Rechnung stimmt.

$$450 \text{ g} \cdot \boxed{} = 450 \text{ kg}$$

Lösung

1000

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler vergleichen die gegebenen Massen (L2) und bestimmen den gesuchten Faktor (K5). Da die Maßzahlen gleich sind, kann die Aufgabe in einem einschrittigen Verfahren nur durch Vergleich der beiden Einheiten gelöst werden. Es ist aber zu erwarten, dass viele Schülerinnen und Schüler in einem Routineverfahren die Massenangaben auf die gleiche Einheit umrechnen, um dann den gesuchten Faktor durch einen Vergleich der Maßzahlen zu bestimmen. Da es sich bei dem gesuchten Faktor um eine Zehnerpotenz handelt, kann dieser Vergleich ohne explizite Rechnung durchgeführt werden (AB I).

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung dieser Aufgabe hatten**, kann es hilfreich sein, selbstständig die Massen verschiedener Gegenstände mit einer Tafelwaage zu bestimmen. Alternativ kann das Heben unterschiedlicher Wägestücke einen haptischen Zugang ermöglichen. Umrechnungen von Massen in kleinere und größere Einheiten können sich anschließen.

- Wandle in die angegebenen Einheiten um.

$$12 \text{ kg} = \boxed{} \text{ g}$$

$$23000 \text{ g} = \boxed{} \text{ kg}$$

$$340 \text{ kg} = \boxed{} \text{ g}$$

$$500 \text{ g} = \boxed{} \text{ kg}$$

$$7,5 \text{ kg} = \boxed{} \text{ g}$$

$$8400 \text{ g} = \boxed{} \text{ kg}$$

$$16,05 \text{ t} = \boxed{} \text{ kg}$$

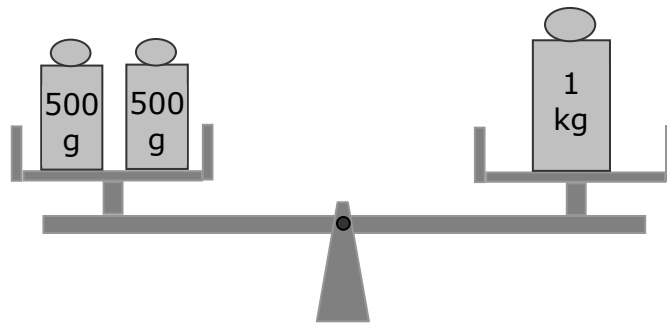
$$1050 \text{ kg} = \boxed{} \text{ kg}$$

Das Vervielfachen von Massen sollte über Wiegesituationen und einfache Aufgaben wiederholt werden.

Beispiel:

$$2 \cdot 500 \text{ g} = 1 \text{ kg}$$

- Berechne.
 $2 \cdot 200 \text{ g} = ? \text{ kg}$
 $4 \cdot 750 \text{ g} = ? \text{ kg}$



Übungsaufgaben zum Vervielfachen und Teilen von Massen, gegebenenfalls mit einer verbalen Beschreibung des Lösungsweges, können folgen.

- Berechne

$$20 \text{ g} \cdot 100 = \boxed{} \text{ kg}$$

$$40 \text{ g} \cdot 500 = \boxed{} \text{ kg}$$

$$16 \text{ g} \cdot 1000 = \boxed{} \text{ kg}$$

$$2 \text{ kg} : 8 = \boxed{} \text{ g}$$

Sind die Routineverfahren eingeübt, kann zur Sicherung und Vertiefung die Komplexität der Aufgaben erhöht werden.

Schülerinnen und Schüler, die keine Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Testaufgabe hatten, können Varianten der Testaufgabe bearbeiten, die ein mehrschrittiges Vorgehen verlangen.

- Ergänze die Lücken so, dass die Rechnungen stimmen.

$$35 \text{ g} \cdot \boxed{} = 21 \text{ kg} \quad ; \quad 275 \text{ g} \cdot \boxed{} = 11 \text{ kg}$$

Darüber hinaus können diese Schülerinnen und Schüler beauftragt werden, Aufgaben für eine Übungssequenz oder ein Arbeitsblatt zu entwickeln.

Aufgabe 18: 24 Stunden

Aufgabe

Jeder Tag hat 24 Stunden.

Im Durchschnitt ist jeder Mensch $\frac{2}{3}$ eines Tages wach, den Rest der Zeit schläft er.

Viele Menschen verbringen durchschnittlich $\frac{1}{8}$ der Zeit, die sie wach sind, vor dem Fernseher.

Wie viele Stunden verbringen diese Menschen durchschnittlich jeden Tag vor dem Fernseher?

Diese Menschen verbringen durchschnittlich jeden Tag _____ Stunden vor dem Fernseher.

Lösung

2

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler übersetzen eine reale Situation in eine mathematische Struktur (K3). Zur Lösung benötigen sie Sinn tragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen (L1). Es gibt prinzipiell zwei Vorgehensweisen:

1. Schrittweises Umrechnen der genannten Anteile in Stunden oder
2. Berechnung des Anteils vom Anteil und abschließende Bestimmung der Stundenanzahl (K5).

Der zweite Weg erscheint durch die Multiplikation zweier Brüche schwerer, ist aber hinsichtlich der Bestimmung der Stundenanzahl einfacher. Im Falle eines Verzichts auf das Kürzen ist es möglich, die Stundenzahl direkt im Zähler abzulesen. Der Lösungsweg ist für Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe komplex (AB III).

Als **Fehler** sind in erster Linie Rechenfehler oder Verwechslungen (z. B. von Schlaf- und Wachzeit) zu erwarten. Bei fehlendem Verständnis für die zu modellierende Realsituation wird vermutlich eher die Aufgabe unbearbeitet bleiben. Bei wenigen Schülerinnen und Schülern kann es auch Unsicherheiten über die Anzahl der Stunden eines Tages geben. Es ist nicht ausgeschlossen, dass Schülerinnen oder Schüler versuchen, das Ergebnis durch Raten zu

bestimmen, wenn sie die Aufgabenstellung mathematisch nicht durchdrungen haben.

Zur **Diagnose** empfiehlt sich sowohl eine Betrachtung vorhandener Lösungsnotizen als auch ein Interview mit den Schülerinnen und Schülern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet es sich an, einfachere Anteilsberechnungen zu wiederholen, z. B.:

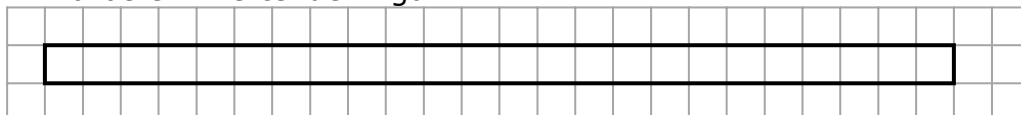
- Wie viele Stunden hat $\frac{1}{4}$ eines Tages (haben $\frac{3}{4}$ eines Tages)?

Im Hinblick auf ein Grundverständnis für Anteile vom Ganzen wäre auch die Umkehrung zu wiederholen:

- Welchen Anteil an einem Tag haben 6 Stunden Schulbesuch?

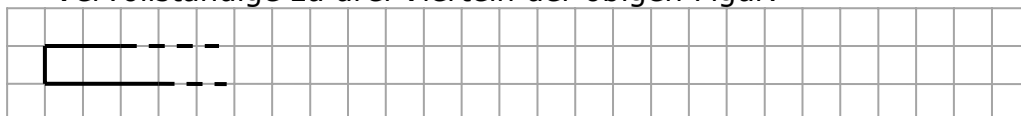
Hilfreich können hierbei auch grafische Darstellungen sein, z. B. in Kreisdiagrammen oder in Rechtecken mit 24 gleichen Teilen (Kästchen). Das Grundverständnis kann beispielsweise wie folgt gefördert werden:

- Färbe ein Viertel der Figur.



Wie kannst du die Anzahl der einzufärbenden Kästchen ausrechnen?

- Vervollständige zu drei Vierteln der obigen Figur.



Wie kannst du die Anzahl der Kästchen in der entstandenen Figur ausrechnen?

Auch für die Aufeinanderfolge der Anteilsangaben für beide Lösungsansätze der vorliegenden Aufgabe bieten sich Unterstützungen in Form von Abbildungen an. Die Berechnung eines Anteils vom Anteil kann folgendermaßen veranschaulicht werden:

$$\frac{3}{4} \text{ von } 24 = 18$$



$$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{3}{4} \text{ von } 24 = 12$$



Rechnerisch bedeutet dies: $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ sind $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

$\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von 24 ist also $\frac{1}{2}$ (die Hälfte) von 24.

- Drücke durch einen einzigen Bruch aus und erfinde Aufgabentexte zu den Anteilsangaben.

a) $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ von $\frac{2}{5}$ c) $\frac{4}{9}$ von $\frac{3}{4}$

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, lassen sich schwerere Anteilsberechnungen üben, z. B. unter Einbeziehung von Bruchteilen von Stunden oder mit Variationen der Fragestellung.

- Jens verbringt heute $5\frac{1}{2}$ Zeitstunden in der Schule. Er hat 6 Unterrichtsstunden. Jede Unterrichtsstunde dauert 45 Minuten. Welcher Anteil der $5\frac{1}{2}$ Stunden ist Unterrichtszeit (Pausenzeit)?
- In Claras Klasse sind gleich viele Mädchen wie Jungen. $\frac{2}{3}$ der Mädchen und $\frac{3}{4}$ der Jungen kommen mit dem Bus zur Schule. Welcher Anteil der Schülerinnen und Schüler der ganzen Klasse kommt mit dem Bus zur Schule?

Aufgabe 19: Wackelturm

Aufgabe



Zum Spiel „Wackelturm“ gehören 57 gleiche quaderförmige Bausteine mit den Maßen $1,0\text{ cm} \times 2,5\text{ cm} \times 7,5\text{ cm}$.

Angelika baut einen Turm, bei dem sich in jeder Schicht nur zwei Bausteine befinden. Alle Steine liegen auf der Seite mit dem größten Flächeninhalt.

Ein Baustein bleibt übrig.

Wie hoch wird dieser Turm?

Dieser Turm wird _____ cm hoch.

Lösung

28

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

- Die Schülerinnen und Schüler entnehmen aus dem Text die Maße für einen Baustein. Daraus ermitteln sie die Seite mit dem größten Flächeninhalt (L2) und erhalten die Höhe von einem Baustein in der vorgegebenen Lage. Mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Bausteine bestimmen sie, aus wie vielen Schichten der neue Turm bestehen muss. Sie multiplizieren die Anzahl der Schichten mit der Höhe eines Bausteins und erhalten die Höhe des Turmes (K5). Der Lösungsvorgang fordert die Modellierung aus Bild und Text in eine mathematische Sprache (K3). Die Rechnung ist mehrschrittig (AB II).

- Die Schülerinnen und Schüler können auch von der Abbildung des Turmes ausgehen. Sie erkennen, dass dort die Steine auf der Seite mit dem größten Flächeninhalt liegen und von jeder Schicht ein Stein entfernt werden muss. Mit den 19 entfernten Steinen werden oben auf dem Turm neun neue Schichten aus je zwei Bausteinen gebildet und ein Stein bleibt übrig (K3, AB II). Sie multiplizieren die Höhe eines Bausteins mit den 28 Schichten und erhalten die Höhe des Turms (K5).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe inhaltlich nicht verstehen und sich von der vorgegebenen Abbildung nicht lösen können, so dass ein Turm aus zwei Bausteinen pro Schicht gedanklich nicht gebaut wird. Ein weiterer Fehler könnte seine Ursache darin haben, dass die Seite mit dem größten Flächeninhalt nicht erkannt und somit eine falsche Höhe eines Steins ermittelt wird. Rechenfehler oder die Missachtung des weggelegten Steins führen ebenfalls dazu, dass die Schülerinnen und Schüler zu einem falschen Ergebnis kommen. Eine Höhe von 28,5 cm erhalten sie, wenn formal $57:2$ gerechnet wird. Bei der zweiten angegebenen Lösungsvariante können Zählfehler Ursachen für ein falsches Ergebnis sein. Es wäre auch möglich, dass die Schülerinnen und Schüler die Steine nur aus den Schichten entfernen und nicht wieder oben hinzufügen.

Zur detaillierten **Diagnose** können die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise im Unterricht erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten das Spiel Wackelturm spielen oder ganz einfach aus Bausteinen Türme mit verschiedenen Anzahlen von Bausteinen in einer Schicht bauen und jeweils die Höhe der Türme bei unterschiedlicher Lage der Bausteine ermitteln. Dabei könnten sie auch die Kantenlängen messen und den Flächeninhalt der größten Fläche berechnen.

Eine weitere Möglichkeit ist das Üben der Division mit und ohne Rest an sachverwandten Aufgabenstellungen, z. B.:

- Baue aus 34 Bausteinen einen Turm mit 4 Bausteinen pro Schicht. Wie viele Bausteine bleiben übrig?

Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, könnten weitere sachgebundene Aufgaben zur Teilbarkeit mit und ohne Rest lösen, wie:

- Es sind 150 gleiche Steine vorhanden. Ein Turm soll gebaut werden,
 - a) bei dem in jeder Schicht gleich viele Steine liegen und alle Steine verwendet werden. Gib mehrere Möglichkeiten an.
 - b) bei dem in jeder Schicht gleich viele Steine liegen und 2 (3) Steine übrig bleiben. Gib mehrere Möglichkeiten an.
- Zum Spiel „Wackelturm“ gehören 57 gleiche quaderförmige Bausteine mit den Maßen 1,0 cm x 2,5 cm x 7,5 cm.
Wie hoch ist der höchstmögliche Turm, wenn er aus drei Steinen pro Schicht besteht und alle Steine die gleiche Lage haben?
Kann man solch einen Turm bauen? Begründe.

Aufgabe 20: Kleidergrößen

Aufgabe

In einem Katalog für Kinderkleidung findet man folgende Größentabelle.

Körpergröße in cm	Kleidergröße
111 - 116	116
117 - 122	122
123 - 128	128
129 - 134	134
135 - 140	140
141 - 146	146

Vor einem Jahr war Lizzy 128 cm groß. Inzwischen ist sie 8 cm gewachsen. Ergänze den folgenden Satz.

Lizzy braucht jetzt Kleidergröße _____ .

Lösung

140

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die zur Lösung notwendigen Informationen entnehmen die Schülerinnen und Schüler einer tabellarischen Übersicht und dem Aufgabentext (K4, K6). Sie erfassen die Zuordnung der Körpergrößen zu bestimmten Kleidergrößen, wobei diese Zuordnung nicht linear ist (L4). Der Umgang mit Tabellen ist ihnen vertraut und das zur Lösung nötige Merkmal einfach zu entnehmen (AB I).

Zu erwartende **Fehler** sind, dass die notwendige Addition nicht richtig ausgeführt bzw. übersehen oder die richtig berechnete Körpergröße einer falschen Kleidergröße zugeordnet wurde. Diese Fehler lassen auf eine flüchtige Arbeitsweise schließen. Die Arbeit mit Intervallen kann für die Schülerinnen und Schüler zu Problemen führen.

Für eine **Diagnose** ist es sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg kommentieren zu lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

In der weiteren Unterrichtsarbeit können ähnliche Zuordnungen aus der Alltagserfahrung der Schülerinnen und Schüler zur Anwendung kommen, wie etwa die Zuordnungen Ware und Preis, Punkte und Note oder Name und Nummer im Klassenbuch. Dabei ist es möglich, Zuordnungen vorzugeben, erstellen oder recherchieren zu lassen. In jedem Fall werden die Kinder zum Kommunizieren angeregt. Es eignen sich hier vielfältige Problemstellungen der Leitlinie Daten und Zufall.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, kommen zwei Übungsaspekte besonders in Betracht.

Es besteht Übungsbedarf im Rechnen mit Größen und im Entnehmen von Informationen aus mathematischen Darstellungen.

- Ergänze die Tabelle und finde ähnliche Aufgaben.

A	B	A + B	A - B
158 cm	17 cm		
50 cm	32 cm		
1,5 m	80 cm		
	3 cm	61 cm	
3,4 m			1,5 m

- Entnimm der Tabelle, welche Noten die Kinder erreicht haben:
Max 15 Punkte, Lisa 23 Punkte, Sophie 9 Punkte und Susi 19 Punkte.
Max und Susi ärgern sich beide sehr, warum?

Punkte	22; 23	20; 21	16 bis 19	11 bis 15	5 bis 10	0 bis 4
Zensur	1	2	3	4	5	6

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können aufgefordert werden, eigene Tabellen zu selbst gewählten Problemen zu erstellen. Die Darstellungsform zu variieren, erhöht den Festigungseffekt.

- Fertige zu der Aufgabe aus dem Test eine grafische Darstellung an.
- Erfrage, in welchem Monat deine Mitschülerinnen und Mitschüler Geburtstag haben. Fertige dazu eine Übersicht an. Stelle die ermittelten Daten grafisch dar.
- Informiere dich über die Tarife der Deutschen Post. Finde heraus, wie viel das Versenden von Briefen kostet und wovon der Preis abhängt. Fertige dazu eine Übersicht an. Denke dir zu deiner Übersicht Aufgaben aus und lasse sie von deinen Mitschülern lösen.
- Verdreifacht man eine Zahl und vermehrt das Ergebnis um sieben, erhält man eine andere Zahl. Finde Beispiele für solche Zahlenpaare. Stelle den Zusammenhang grafisch dar.

Aufgabe 21: Kuchen

Aufgabe

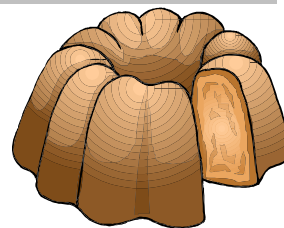
Ein klassischer Marmorkuchen besteht aus

$\frac{2}{3}$ hellem Teig und $\frac{1}{3}$ Schoko-Teig.

Für den Schoko-Teig werden 4 Esslöffel Kakaopulver benötigt.

Da Sirin lieber Schokoladenkuchen mag, soll ihr Marmorkuchen

jedoch aus $\frac{1}{3}$ hellem Teig und $\frac{2}{3}$ Schoko-Teig bestehen.



Wie viele Esslöffel Kakaopulver benötigt Sirin für ihren Marmorkuchen?

Sirin benötigt _____ Esslöffel Kakaopulver für ihren Marmorkuchen.

Lösung

8

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Der Aufgabenstellung liegt ein linearer Zusammenhang zu Grunde. Zwei Mengen werden einander zugeordnet (L4). Die Schülerinnen und Schüler erfassen einen komplexen mathemathikhaltigen Text, übersetzen ihn in eine mathematische Struktur (K3, K6) und lösen die Aufgabe in zwei Schritten (AB II).

Fehler treten auf, wenn die beiden Mengen falsch zugeordnet werden. Werden 4 Esslöffel als Lösung angegeben, kann flüchtiges Arbeiten die Ursache sein, da nicht erkannt wurde, dass die Teigmengen vertauscht wurden bzw. der gewünschte Schokoteig das Doppelte des ursprünglichen ist, also 2 mal 4 Esslöffel Kakao nötig sind.

Für eine **Diagnose** ist es hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsgedanken kommunizieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Sichere Fertigkeiten beim Vergleichen von Brüchen bilden eine Basis dieser Aufgabe. Anteile vom Ganzen können thematisiert werden. Anschließend bietet sich das Üben von Zuordnungen an.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können hinsichtlich ihrer Lesekompetenz gestärkt werden. Vielfältige Sachtexte können gemeinsam mit den Kindern analysiert und hinsichtlich ihrer mathematischen Zusammenhänge aufgearbeitet werden.

Das formale Bestimmen von Anteilen von Ganzen und deren Vervielfachung dient der Erfolgssicherung. Das Vervielfachen von Anteilen kann geübt werden.

- Eine Pizza wird in acht gleiche Teile geschnitten. Max nimmt sich zwei, Sina vier Teile davon. Welchen Anteil von der Pizza erhält Max, welchen Sina? Wie viel mal mehr hat Sina als Max?
- Sina nimmt sich von einer anderen Pizza die doppelte Menge wie Max. Gib an, in wie viele gleich große Stücke die Pizza geteilt werden kann. Wie viele Stücke erhält Max davon, wie viele Stücke Sina? Gib mindestens zwei Beispiele für eine Teilung der Pizza an.
- In einigen Sorten Kakaopulver ist sehr viel Zucker enthalten. Auf einer Verpackung stand der Hinweis, dass von 100 g des Pulvers 60 g Zucker sind. Wie viel Zucker ist dann in 500 g (800 g; 1 kg; 1,5 kg) enthalten?

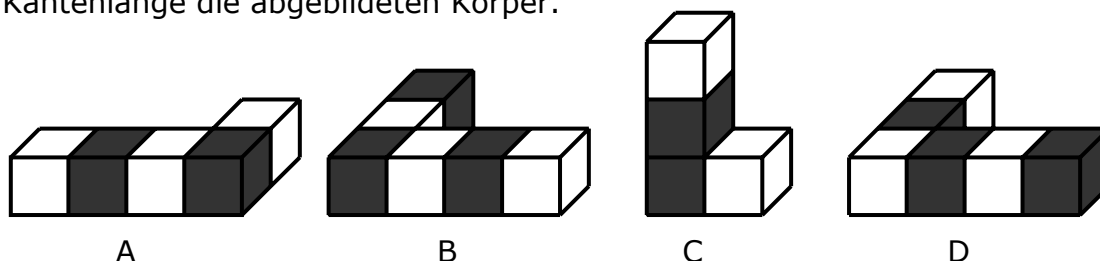
Schülerinnen und Schülern, die beim Bearbeiten dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können komplexere Zusammenhänge angeboten werden, wie:

- $\frac{2}{3}$ einer Strecke ist 6 m lang. Wie lang ist die ganze Strecke? Welchem Anteil entsprechen 3 m (1 m, 2 m, 5 m) dieser Strecke?
- 8 kg sind $\frac{4}{5}$ der Masse eines Kartoffelsacks. Wie viel wiegt dieser Kartoffelsack?
- Für eine Person benötigt man in einem Rezept $1\frac{1}{8}$ Liter Milch und 50 g Zucker.
 - a) Wie viel Milch und Zucker muss man für eine Gruppe von 50 Personen bereit stellen?
 - b) Es kommen nur 40 Personen, wie viel Milch und Zucker bleiben nun von der bereit gestellten Menge übrig? Welchem Anteil von der Menge von 50 Personen entspricht das?
- Stelle Aufgaben zusammen, die Anteile von Ganzen und deren Vielfache beinhalten. Veranschauliche deine Aufgaben und lasse sie von deinen Mitschülerinnen und Mitschülern lösen. Diskutiere mit ihnen ihre Lösungen.

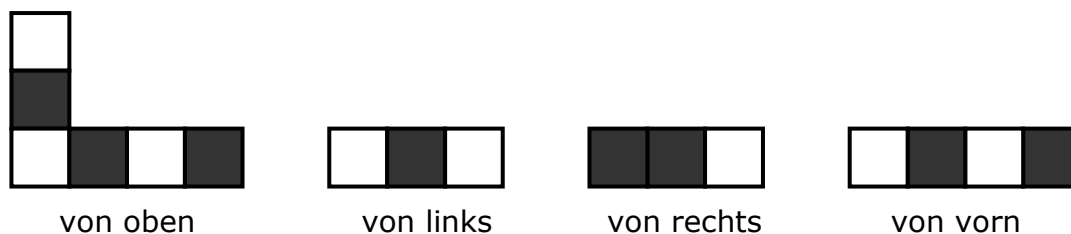
Aufgabe 22: Würfelkörper II

Aufgabe

Susanne baut aus kleinen schwarzen und weißen Würfeln mit jeweils gleicher Kantenlänge die abgebildeten Körper.



Anschließend zeichnet sie Ansichten eines Körpers aus verschiedenen Blickrichtungen.



Welchen Körper hat Susanne gezeichnet?

Susanne hat Körper _____ gezeichnet.

Lösung

D

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler operieren gedanklich mit Körpern, die aus Würfeln zusammengesetzt sind (L3). Sie wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen und Ordnen diese aufgrund der Anzahl bzw. Verteilung der schwarzen und weißen Würfel einander zu (K4, AB II).

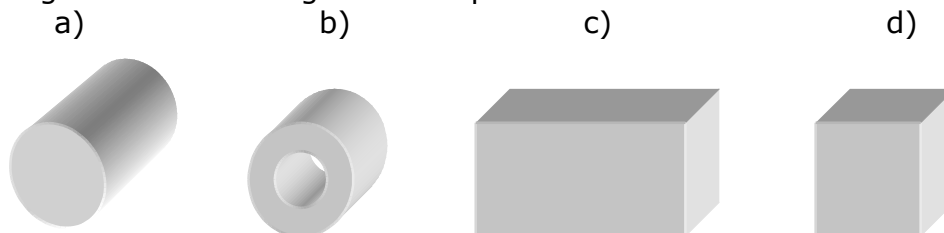
Fehler treten vor allem dann auf, wenn Schülerinnen und Schüler die Blickrichtung auf die Körper nicht beachten oder missverstehen, bzw. Unterschiede der Anordnung und Färbung der Teilwürfel nicht erkennen. Für eine **Diagnose** der Fehler ist es sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler ihre Entscheidung kommentieren zu lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

In der weiteren Unterrichtsarbeit können ähnliche Aufgabenstellungen mit realen Körpern Gegenstand sein. Dabei ist es möglich, den Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsarten mit Schattenbildern anschaulich zu unterstützen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich folgende Übungen an:

- Gegeben sind die folgenden Körper:

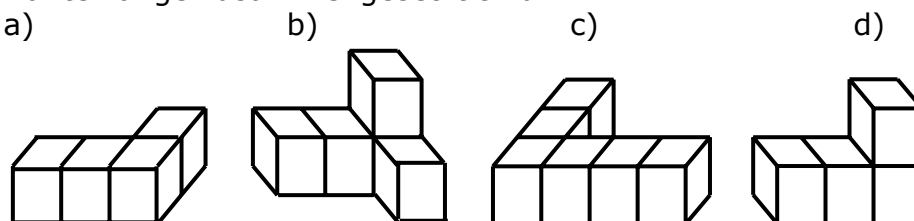


Lege die Körper nacheinander nah vor eine weiße Projektionsfläche und strahle sie mit einer Taschenlampe an.

- Welche Schattenbilder erzeugen Körper a) bzw. Körper b), wenn man sie von vorn anstrahlt?
- Bei welchen Körpern kann das folgende Schattenbild erzeugt werden?



- Gegeben sind folgende Körper, die aus kleinen Würfeln gleicher Kantenlänge zusammengesetzt sind:

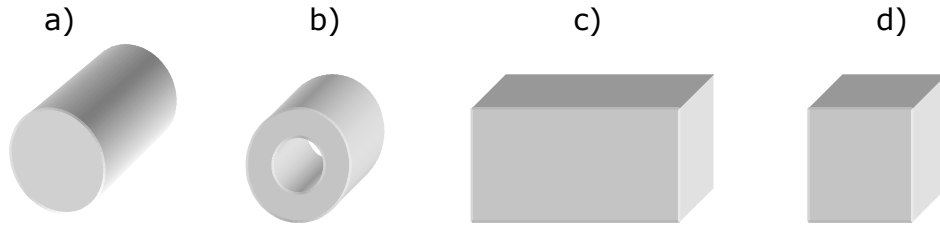


Welche dieser Würfelkörper erzeugen bei geeigneten Lagen auf der Projektionsfläche eines Overheadprojektors die Schattenbilder

(I)  oder (II)  ?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können durch folgende Aufträge gefordert und gefördert werden:

- Gegeben sind vier Körper:

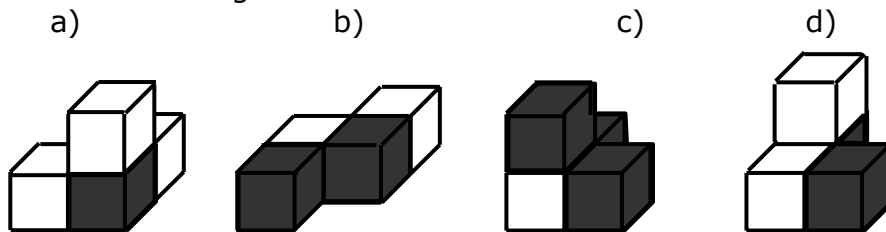


Diese Körper werden nacheinander auf die Projektionsfläche eines Overheadprojektors gelegt. Es entstehen folgende Schattenbilder:

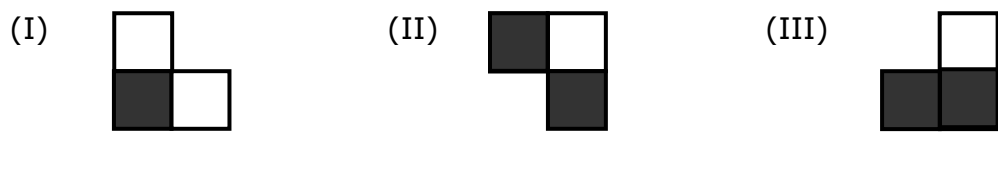


Welche Körper erzeugen jeweils die Schattenbilder?

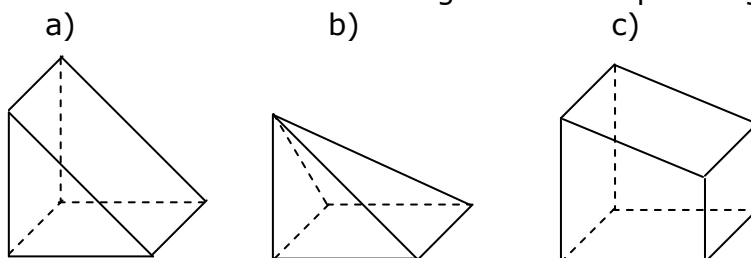
- Gegeben sind vier Körper, die jeweils aus weißen und schwarzen Würfeln gleicher Kantenlänge bestehen:



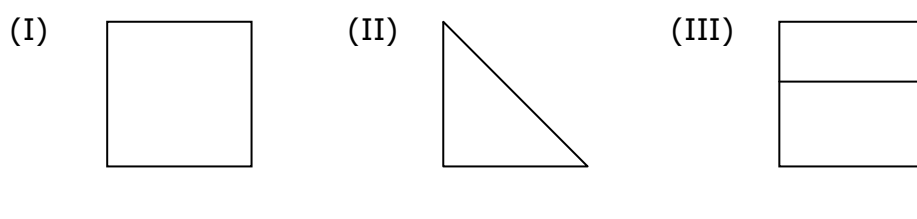
Welche dieser Körper weisen eine der angegebenen Ansichten auf? Schreibe den passenden Buchstaben unter jede Ansicht. Du darfst die Körper gedanklich drehen.



- Aus einem Holzwürfel wurden folgende Teilkörper hergestellt:



Welcher dieser Körper kann eine der folgenden Seitenansichten aufweisen? Ergänze jeweils den/die passenden Buchstaben.



Aufgabe 23: Gleichung

Aufgabe

Welchen Zahlenwert muss * haben, damit die Gleichung richtig ist? Kreuze an.

$$5 \cdot * = 54 - *$$

- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10
- ☐ 11

Lösung

- ☐ 7
- ☐ 8
- ☒ 9
- ☐ 10
- ☐ 11

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten einen funktionalen Zusammenhang. Gesucht ist die Zahl, die als Faktor im Produkt und als Subtrahend in der Differenz Gleichheit herbeiführt (L4). Durch Probieren mit den vorgegebenen Zahlen oder durch Ausschließen einzelner Antwortmöglichkeiten (K2, K5) ermitteln sie die Lösung. Die dabei auszuführenden Rechenoperationen sind elementar, die Verknüpfung zweier Grundoperationen erfordert einen zweischrittigen Lösungsansatz (AB II).

Finden die Schülerinnen und Schüler einen mathematischen Zugang zur vorliegenden Aufgabe, sind vor allem Rechen**fehler** zu erwarten, die auf mangelnde Fertigkeiten im Bereich des Einmaleins oder der Grundoperationen zurückzuführen sind. Auch kann es vorkommen, dass die Schülerinnen und Schüler nicht denselben Wert für das Symbol * einsetzen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe hatten, können angeleitet werden, eine Serie von Aufgaben mit ähnlicher Rechenanweisung zu lösen oder selbst zu erstellen. Ähnlich wie in der vorliegenden Testaufgabe sollte dieselbe Zahl auf beiden Seiten der Gleichung in unterschiedlichen Rechenoperationen eingebunden sein.

- $3 \cdot 4 = 16 - 4$
 $4 \cdot 5 = 25 - 5$
...

Aufgaben nach einem vorgegebenen Muster können mit folgenden Aufträgen bearbeitet werden:

- Löse diese Gleichungen. Erkennst du ein Muster? Setze die Aufgabenreihe um drei Gleichungen fort.
 $1 \cdot * = 6 - *$
 $2 \cdot * = 9 - *$
 $3 \cdot * = 12 - *$
 $4 \cdot * = 15 - *$
...

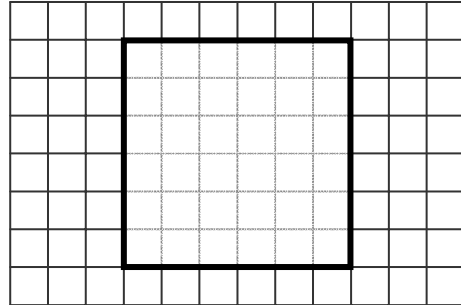
Für Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können Aufgaben gestellt werden, bei denen mehrere Lösungen auftreten, der Zahlenbereich erweitert oder die Aufgabenstellung umgekehrt wird. Zu einer vorgegebenen Lösung können Gleichungen gefunden oder eine ganze Aufgabenreihe entwickelt werden.

- Löse diese Gleichungen. Erkennst du ein Muster? Setze die Aufgabenreihe um drei Gleichungen fort.
 $1 \cdot * = 6 - *$
 $2 \cdot * = 9 - *$
 $3 \cdot * = 12 - *$
 $4 \cdot * = 15 - *$
...
- Wähle eine andere Zahl $*$ (z. B. 4) und ändere die Gleichung so ab, dass sie richtig ist. Wie könnte eine Aufgabenreihe für diese Lösungszahl nach dem Muster von oben aussehen?
- Erstelle zwei weitere Aufgabenreihen dieser Art.
- Jeder Stern in der Gleichung steht für dieselbe Zahl.
 $8 \cdot * \cdot * = 72$
 $28 = 100 - 2 \cdot * \cdot *$
 $* \cdot (7 - *) = 0$
...

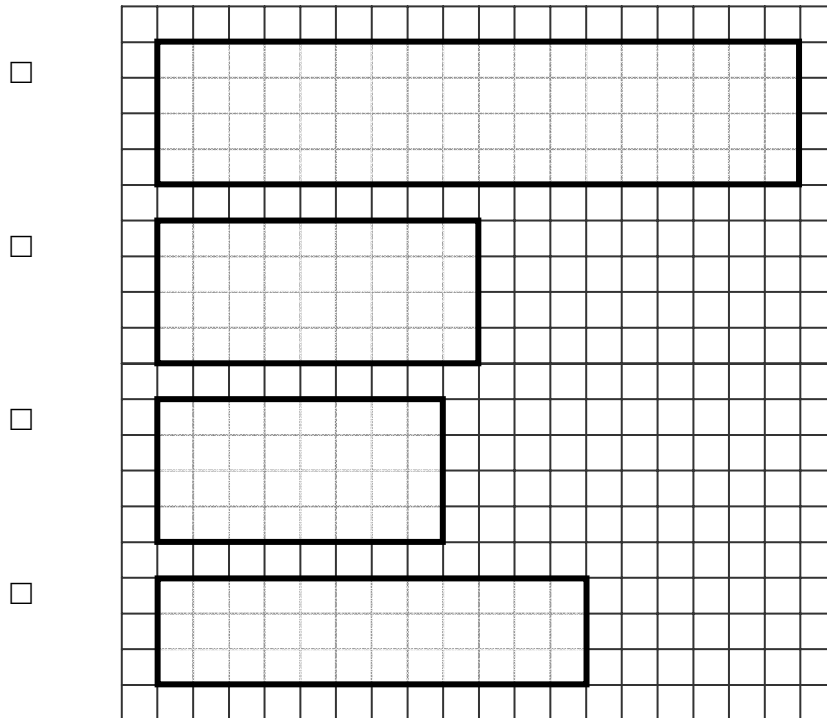
Aufgabe 24: Flächen

Aufgabe

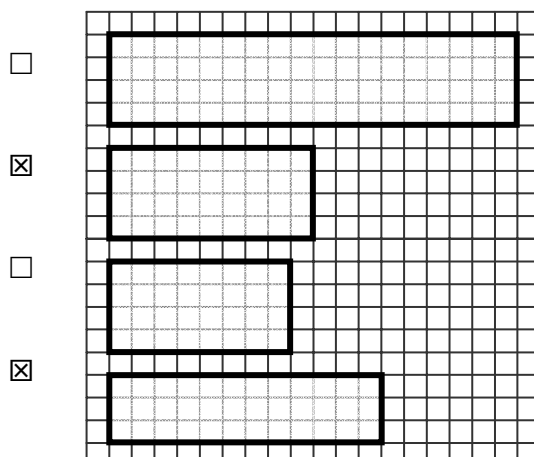
Die Abbildungen zeigen ein Quadrat und vier Rechtecke.



Kreuze **diejenigen Rechtecke** an, die den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat haben.



Lösung



Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler nutzen das Grundprinzip des Messens von Flächen bzw. Längen. Sie ermitteln die Flächeninhalte des Quadrates und der Rechtecke. Diese werden miteinander verglichen (L2, K5). Notwendige Informationen werden aus den Abbildungen entnommen, wobei das Quadratraster im Hintergrund hilfreich sein kann (K4).

Das Verfahren der Lösung ist mehrschrittig (AB II).

Die Schülerinnen und Schüler können auf verschiedene Weisen zur Lösung gelangen, z.B.

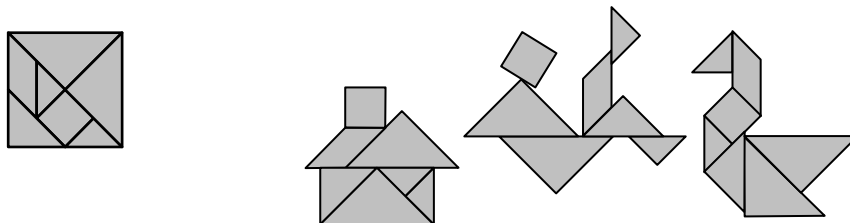
- Die Flächengleichheit wird über den Vergleich der Anzahl der Rasterquadrate in den Figuren geprüft. Durch Auszählen erhalten sie für das Quadrat 36 Rasterquadrate, für die Rechtecke 72, 36, 32 und 36 Rasterquadrate als Flächeninhalte.
- Die Flächengleichheit wird über den Vergleich der Anzahl der Rasterquadrate in den Figuren in Kombination mit der Betrachtung von Länge und Breite der Rechtecke geprüft. Durch Auszählen erhalten sie für das Quadrat 36 Rasterquadrate, das 1. Rechteck 72 und das 2. Rechteck 36 Rasterquadrate. Sie erkennen, dass das 3. Rechteck genauso breit ist, wie das 2. Rechteck (vier Seitenlängen eines Rasterquadrates). Die Länge des 3. Rechtecks ist aber um die Seitenlänge eines Rasterquadrates kürzer als die des 2. Rechtecks, damit kann es nicht flächengleich zum 2. Rechteck sein und somit kann auch Flächengleichheit zum Quadrat ausgeschlossen werden.
- Von allen Figuren werden Länge und Breite bestimmt. Hierfür könnten wieder Seitenlängen von Rasterquadraten zum Auszählen genutzt werden, oder es wird mit Lineal (in cm oder mm) gemessen. Eine anschließende Flächenberechnung, Länge mal Breite, bringt die zum Vergleich notwendigen Ergebnisse:
36 Rasterquadrate - 9 cm^2 ; 72 Rasterquadrate - 18 cm^2 ; 36 Rasterquadrate - 9 cm^2 ; 32 Rasterquadrate - 8 cm^2 und 36 Rasterquadrate - 9 cm^2 .

Fehlende Vorstellungen zum Prinzip des Messens bzw. zur Bestimmung des Flächeninhalts von Vierecken können Ursachen von auftretenden **Fehlern** oder das Nichtlösen dieser Aufgabe sein. Sollten Schülerinnen und Schüler nur das 3. Rechteck als flächengleich angekreuzt haben, so weist dieses auf die Verwechslung von Flächeninhalt und Umfang hin, denn dieses Rechteck hat den gleichen Umfang wie das Quadrat. Sicher wird es auch Schülerinnen und Schüler geben, die übersehen, dass zwei richtige Lösungsvarianten vorhanden sind.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten handelnd die Bedeutung des Begriffes Flächeninhalt verinnerlichen. Lege- und Auszählaufgaben könnten hier hilfreich sein, z. B.:

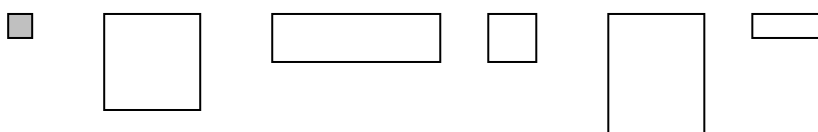
- Aus allen Teilen des Tangram sollen verschiedene Figuren gelegt werden.



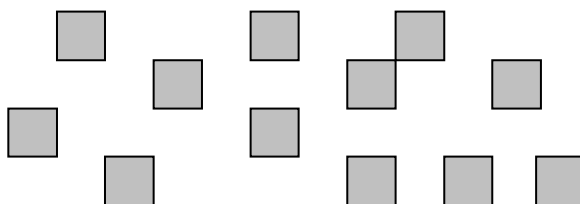
Als gemeinsame Eigenschaft aller Figuren kann dann die Flächengleichheit festgestellt und begründet werden.

Aufgaben, bei denen zunächst beliebige Quadrate, dann Einheitsquadrate zum Auszählen und Vergleichen von Flächeninhalten benutzt werden, könnten sich anschließen. Sie unterstützen ebenfalls den Erkenntnisprozess. Dabei ist vorerst darauf zu achten, dass das Auslegen mit ganzen Quadraten möglich ist, z. B.:

- Wie viele kleine graue Quadrate werden benötigt, um die Flächen der folgenden Rechtecke auszulegen? Ordne die Rechtecke nach der Größe ihrer Flächeninhalte. Beginne mit dem kleinsten Rechteck.



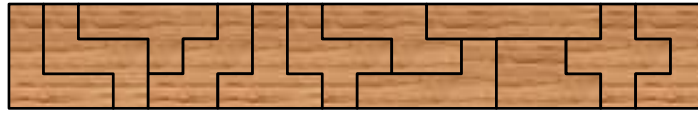
- Lege aus diesen 12 Quadraten eine vollständig ausgefüllte Rechteckfläche. Finde mehrere Möglichkeiten.



Das Auslegen von Figuren kann nach wenigen Übungen durch das Zeichnen auf kariertem Papier und das Auszählen mit Hilfe der Kästchen ersetzt werden. Bei großen Flächen werden die Schülerinnen und Schüler nicht mehr alle Quadrate des Flächeninhaltes zählen, sondern schrittweise dazu übergehen in der Länge und in der Breite einmal zu zählen und dann zu multiplizieren. Werden zum Auszählen (Auslegen) Einheitsquadrate benutzt, ist der Übergang vom Auszählen zum Rechnen „Länge mal Breite“ nach der Messung der Länge und der Breite möglich.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten,** sind Aufgaben geeignet, die das Verständnis des Flächeninhaltsbegriffs auch in nicht vertrauten Darstellungen oder Zusammenhängen verlangen, z. B.:

- Du siehst eine rechteckige Holzfläche, die mit Pentominos ausgelegt ist. Jedes Pentomino besteht aus fünf Quadraten, jedes einzelne Quadrat ist 1 cm^2 groß.

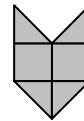
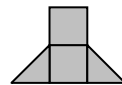
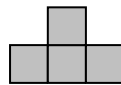
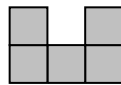
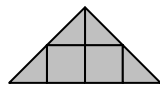
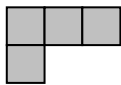


Wie viele Pentominos sind es?

Wie lang und wie breit ist diese Fläche?

Wie groß ist der Flächeninhalt der Holzfläche?

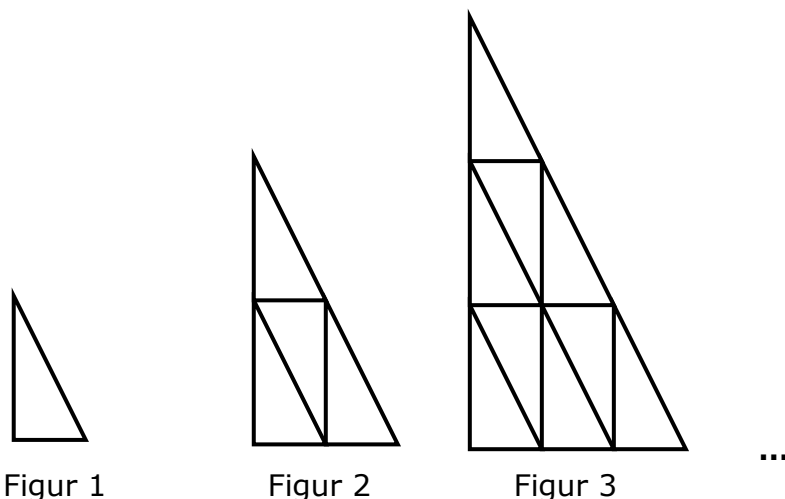
- Dieses Quadrat hat insgesamt einen Flächeninhalt von 1 cm^2 . Markiere unter den folgenden Figuren alle, die auch einen Flächeninhalt von 1 cm^2 haben.



Aufgabe 25: Dreiecksfigur

Aufgabe

Die Abbildung zeigt eine Folge von Figuren, die aus unterschiedlich vielen gleichen Teildreiecken zusammengesetzt sind.



Aus wie vielen gleichen Teildreiecken besteht Figur 8?

Figur 8 besteht aus _____ gleichen Teildreiecken.

Lösung

64

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erkennen einen quantitativen Zusammenhang in den Dreiecksfiguren (L4, K4). Sie verwenden heuristische Mittel (K2), um die Anzahl der Teildreiecke für die weiteren Figuren zu ermitteln. Dabei können sie durch Anfertigen einer Skizze, durch das Auszählen der Teilfiguren oder durch Ermitteln der jeweils hinzukommenden Teildreiecke (+ 3, + 5, + 7, + 9, ...) zur Lösung kommen. Auch das Nutzen eines allgemeinen, formalen Bildungsgesetzes (n^2) ist möglich. Die Schülerinnen und Schüler lösen ein anspruchsvolles Problem durch mehrschrittiges strategiestütztes Vorgehen (AB III).

Es können Additions- bzw. Zählfehler auftreten. Die Angabe der Zahl 15 weist zum Beispiel darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler nur die Anzahl der

neu hinzu gekommenen Teildreiecke für die Figur 8 angegeben haben und nicht die Gesamtzahl der Teildreiecke.

Zur **Diagnose** falscher, aber auch fehlender Angaben, sollten die Schülerinnen und Schüler im Unterricht ihre Vorgehensweise erläutern. Dabei ist es möglich zu erkennen, ob es Schwierigkeiten beim Erfassen funktionaler Zusammenhänge gibt.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können zunächst handlungsorientiert üben. Dabei sollten Aufgaben gestellt werden, die ausschließlich handelnd bzw. durch Skizzen bearbeitbar sind (wie Streichholzfiguren fortsetzen, Münzen auslegen, aus Bausteinen Figuren herstellen) und auf den verallgemeinernden Aspekt verzichten.

Über das Verbalisieren der Veränderungen zur jeweils folgenden Figur und das Feststellen der Anzahl der benötigten Gegenstände können sie an das jeweilige Bildungsgesetz herangeführt werden.

Zum Beispiel:

- Baue Streichholzketten nach dem vorgegebenen Muster.
- Bestimme die Anzahl der Hölzer für 1, 2, 3, 4 und 5 Kettenglieder.
- Beschreibe die Gesetzmäßigkeit in Worten.
- Bestimme die Anzahl der Hölzer für 10 und 20 Kettenglieder.
- Vervollständige den Satz: Die Anzahl der Hölzer bei x Kettenglieder ist ...

Anzahl der Ketten- glieder	1	2	3	4	5	10	20	x
Muster 1								3 x
Anzahl der Hölzer	3	6						
Muster 2								
Anzahl der Hölzer	5	...						
Muster 3								
Anzahl der Hölzer	3	...						

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, kann die Anforderung erhöht werden, indem man die Figuren komplexer wählt und die Art der Vorgabe variiert. Es kann auch verstärkt auf die Formulierung eines allgemeingültigen Bildungsgesetzes hingearbeitet werden. Die Lösungen erfordern dabei im stärkeren Maße eine Abstraktion bzw. sogar eine Verallgemeinerung. Es können auch Angebote gemacht werden, die auf eine konkrete Veranschaulichung verzichten (Zahlenfolgen fortsetzen, Zahlenfolgen nach Bildungsgesetzen erstellen).

Anzahl der Ketten- glieder	1	2	3	4	5	10	20	x
Muster 1								
Anzahl der Hölzer	5	12						7×-2
Muster 2								
Anzahl der Hölzer	4	9	14		24			
Muster 3								
Anzahl der Hölzer	6	10	14			42		
Muster 4								
Anzahl der Hölzer								6×-1

(siehe auch /3/ Kommentierungshefte zum Haupttest 2009; Heft A, Aufgabe 11;
Heft B, Aufgabe 1 und Heft C, Aufgabe 1 und /5/)