



Lernstandserhebung

Didaktisches Material

BILDUNGSLAND
Hessen 

6

Mathematik

(Heft B)

Impressum

Erarbeitet durch

AufgabenentwicklerInnen des Länderverbundes Lernstand / VERA 6:

Manfred Bergunde	Hamburg
Kerstin Both	Mecklenburg Vorpommern
Maria Braunhofer	Südtirol, Italien
Detlef Cords	Mecklenburg Vorpommern
Helmut Fehre	Sachsen
Klaus Gülker	Mecklenburg Vorpommern
Stefanie Heinisch	Hamburg
Angelika Klatte	Sachsen
Evelin Klingebiel	Thüringen
Christoph Kost	Hessen
Heide Kretzschmar	Mecklenburg Vorpommern
Sibylle Mackenroth	Sachsen
Michaela Schober	Thüringen
Sylvia Welisch	Hessen

Koordination und Leitung:

Astrid Fischer-Paulin	SBI, Radebeul
Heiko Wontroba	Thillm, Bad Berka

Begutachtung und Beratung:

Dr. Christa Herwig	Thüringen
Prof. Dr. Dominik Leiß	Leuphana Universität, Lüneburg

Inhaltsverzeichnis

Impressum	1
Inhaltsverzeichnis	3
Zuordnung zu den Aufgaben.....	4
Vorbemerkungen	5
Aufgabe 1: Haustiere.....	7
Aufgabe 2: Autobahn.....	10
Aufgabe 3: Zwei Spielwürfel	12
Aufgabe 4: Buchstabensymmetrie	15
Aufgabe 5: Rollrasen	18
Aufgabe 6: Brüche	21
Aufgabe 7: Geldproblem	24
Aufgabe 8: Lagebeziehungen von Geraden	26
Aufgabe 9: Turm aus Bausteinen.....	29
Aufgabe 10: Glasscheibe.....	32
Aufgabe 11: Schokotraum.....	37
Aufgabe 12: Bruchteil	41
Aufgabe 13: Becher.....	44
Aufgabe 14: Fehlende Ziffern.....	49
Aufgabe 15: Größtes Ergebnis	51
Aufgabe 16: Regenmesser	54
Aufgabe 17: Zoobesuch	58
Aufgabe 18: Körpergewicht	62
Aufgabe 19: Schnittpunkte	65
Aufgabe 20: Würfel	68

Zuordnung von Standardmerkmalen

Aufgaben		Allgemeine mathematische Kompetenzen						Leitideen					Anforderungsbereiche		
Nr.	Kurztitel	K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	I	II	III
1	Haustiere				x							x	x		
2	Autobahn			x		x					x		x		
3	Zwei Spielwürfel		x					x				x	x		
4	Buchstabensymmetrie				x					x				x	
5	Rollrasen			x	x	x			x					x	
6	Brüche					x		x					x		
7	Geldproblem		x			x			x					x	
8	Lagebeziehungen von Geraden				x					x				x	
9a	Turm aus Bausteinen		x			x	x		x	x			x		
9b	Turm aus Bausteinen		x			x			x	x				x	
10	Glasscheibe	x	x		x	x			x	x				x	
11	Schokotraum				x		x				x			x	
12	Bruchteil				x	x		x					x		
13	Becher			x		x			x					x	
14	Fehlende Ziffern		x			x		x							x
15	Größtes Ergebnis					x		x						x	
16a	Regenmesser			x	x		x					x		x	
16b	Regenmesser			x	x		x					x		x	
17	Zoobesuch		x	x		x	x		x					x	
18	Körpergewicht				x						x	x		x	
19	Schnittpunkte		x		x					x					x
20	Würfel	x	x			x			x	x					x

Legende:

Allgemeine mathematische Kompetenzen

- K1: Mathematisch argumentieren
 K2: Probleme mathematisch lösen
 K3: Mathematisch modellieren
 K4: Mathematische Darstellungen verwenden
 K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
 K6: Kommunizieren

Leitideen

- L1: Zahl
 L2: Messen
 L3: Raum und Form
 L4: Funktionaler Zusammenhang
 L5: Daten und Zufall

Anforderungsbereiche

- I: Reproduzieren
 II: Zusammenhänge herstellen
 III: Verallgemeinern und Reflektieren

Vorbemerkungen

Adressaten sind Lehrkräfte, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie weitere Lehrkräfte, Fachkonferenzen und innerschulische Gruppen. Sie alle sollen durch das vorliegende Material angeregt werden, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu erkennen, insbesondere im Hinblick auf die individuelle Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler.

Aufbau und Struktur sind durch die Aufgaben des Tests bestimmt. Jede Aufgabe ist kommentiert. Der Umfang und die Tiefe des Kommentars richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zur schnelleren Orientierung zusätzlich in der Fußzeile zu sehen.

Eine Kommentierung zu einer Aufgabe umfasst folgende Teile:

- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler
 - Begründung für die Zuordnung der Standardeigenschaften¹ (und damit der Hinweis auf das didaktische Potential der Aufgabe),
 - häufig zu erwartende Fehler und Hinweise zur Diagnose,
- Hinweise zur Weiterarbeit.

Bezüge zu den Bildungsstandards sind bei der Erarbeitung bzw. Auswahl der Aufgaben für den Test hergestellt worden. Sie werden im vorliegenden Material zum einen durch die Analyse der Standardeigenschaften bei jeder Aufgabe, zum anderen durch die Verteilung jeder Standardeigenschaft in der Menge aller Aufgaben eines Testheftes deutlich. Nicht in jedem Testheft gelingt es, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter konnte von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilen nur eine Teilaufgabe ausgewählt werden und es musste auf weitere mathematisch interessante Aspekte verzichtet werden. Die Kommentierungen ermöglichen aber, weitere Teilaufgaben aufzugreifen und Aufgabenvariationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung ist es, Lehrkräfte in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei jeder Schülerin und jedem Schüler zu unterstützen. Dazu müssen sie u. a. Klarheit darüber haben, welches Potential in einer Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann. So kann über längere Zeiträume hinweg am Aufbau von Kompetenzen gearbeitet werden. Im vorliegenden Material wird für jede Aufgabe die Zuordnung zu den Standardmerkmalen (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen wird so deutlich, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zu einer mathematischen Kompetenz bestimmt.

Teil jeder Kommentierung sind auch mögliche **Überlegungen der Schülerinnen oder Schüler** beim Bearbeiten der Testaufgaben. Es werden in

¹ Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 4.12.2003, S.7 – 15.

diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Aufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und häufig zu erwartende Fehler betrachtet und darüber hinaus Hinweise zur Diagnose gegeben. Dies soll die Lehrkräfte dabei unterstützen, Ansätze zur individuellen Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler zu entwickeln. Weiterhin enthält die Kommentierung für jede Aufgabe Vorschläge, wie diese verändert bzw. variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Die Vorschläge beinhalten auch Anregungen zur Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, Hinweise auf den Umgang mit verschiedenen Lösungen und Überlegungen zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegebenen Sachverhalts.

An der Weiterentwicklung wird von Jahr zu Jahr gearbeitet. Hinweise zum vorliegenden Material nehmen wir gern unter kompetenztest@sbi.smk.sachsen.de entgegen.

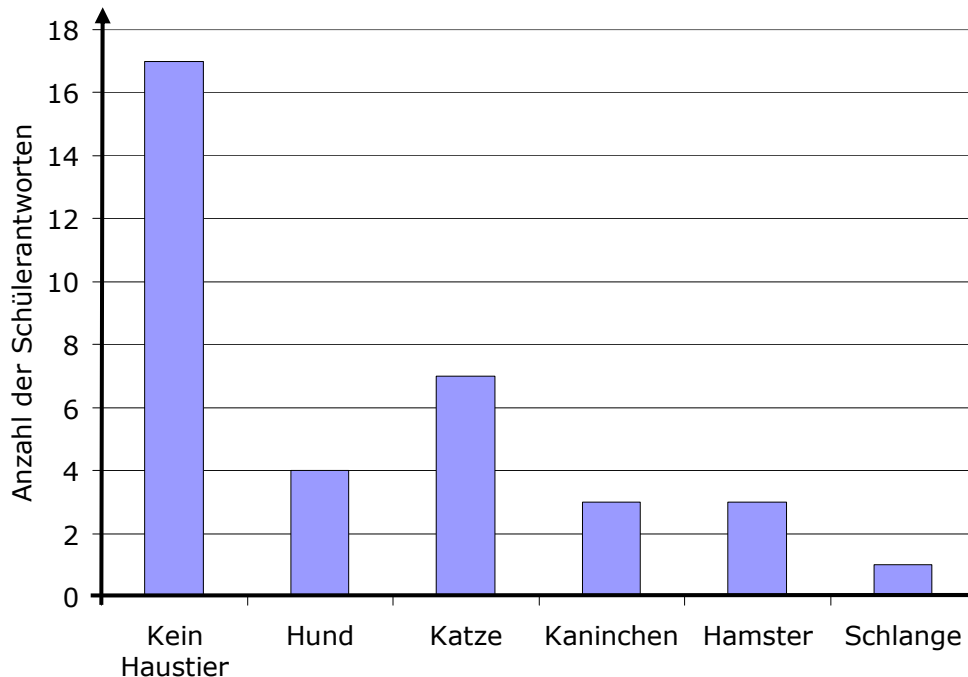
Literatur:

- /1/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 04.12.2003
- /2/ W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006
- /3/ Didaktische Kommentierungen zu den Testheften Lernstand / VERA 6 Mathematik 2008, 2009, 2010 und 2011
- /4/ Testhefte Lernstand / VERA 6 Mathematik 2008, 2009, 2010 und 2011
- /5/ Kompetenztest Mathematik Thüringen

Aufgabe 1: Haustiere

Aufgabe

In der Klasse 6c sind 30 Schüler. Sie wurden nach ihren Haustieren befragt. Im Diagramm siehst du das Ergebnis der Befragung.



Wie viele Schüler haben zu Hause kein Haustier? Ergänze.

_____ Schüler haben zu Hause kein Haustier.

Lösung

17

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der Auswertung der Grafik zu den Befragungsergebnissen erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die erste Säule für die Rubrik „kein Haustier“ steht und die Anzahl in den Schülerantworten zwischen 16 und 18 liegt. Die Anzahlen in den Schülerantworten sind natürliche Zahlen. Zwischen 16 und 18 gibt es nur eine natürliche Zahl, das Ergebnis lautet also 17 (L5, K4). Denkbar ist auch die folgende Überlegung: In der Mitte zwischen 16 und 18 liegt 17.

Der Umgang mit derartigen Diagrammen ist den Schülerinnen und Schülern vertraut und das zur Lösung erforderliche Merkmal direkt zu entnehmen (AB I).

Fehler treten auf:

- wenn Schülerinnen und Schüler die Achseneinteilung der Schülerantworten falsch interpretieren (z. B. 16,5),
- wenn sie das Merkmal „kein Haustier“ überlesen und somit nicht erfasst haben,
- wenn sie beginnen, mit den Anzahlen aus allen Säulen zu rechnen und / oder
- wenn sie versuchen, die gesamte Schülerzahl 30 einzubeziehen, z. B.: $1 + 3 + 3 + 7 + 4 + 17 = 35$ und $35 - 30 = 5$, d. h. 5 Schüler haben kein Haustier.

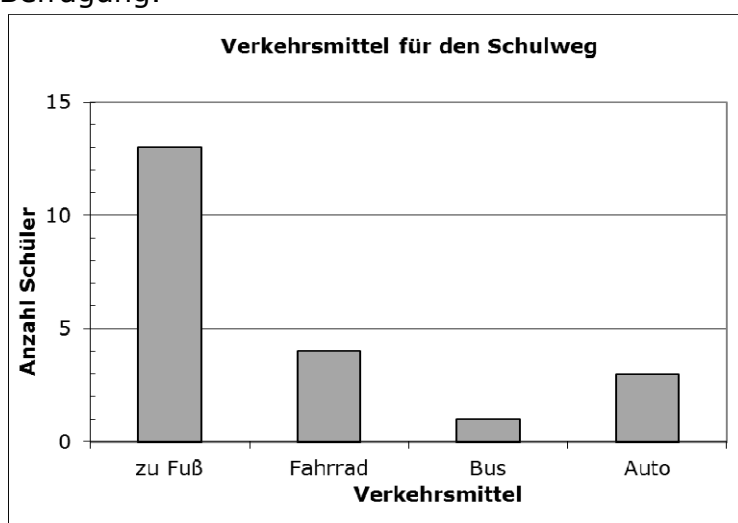
Im nachfolgenden Unterricht könnten Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Lösungsgedanken zu formulieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Das selbstständige Erstellen und das sorgfältige Lesen von Diagrammen, das Ablesen von Werten aus einer gegebenen Darstellung, bei der der abzulesende Wert nicht als Markierung an der y-Achse ohne weiteres erkennbar ist und das durch gezielte Fragestellungen gesteuerte Interpretieren von verschiedenen Diagrammen könnte helfen, Fehler bei solchen Aufgabenstellungen zu vermeiden. Die genutzten Inhalte sollten an der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler orientiert sein, z. B. Statistiken zur Auswertung von Klassenarbeiten, Leistungskontrollen, Übungen, Umfragen in der eigenen Klasse.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst Aufgaben zum einfachen Lesen von Diagrammen bearbeiten, um zu erfahren, wie wichtig sorgfältiges und vollständiges Lesen ist. Dann könnten sie sich mit dem Wechsel der Darstellungsformen Tabelle – Diagramm und umgekehrt auseinandersetzen, z. B.:

- In der Klasse 6a sind 21 Schüler. Sie wurden nach dem Verkehrsmittel für ihren Schulweg befragt. Im Diagramm siehst du das Ergebnis der Befragung.



Bestimme die fehlenden Zahlen in der Tabelle mit Hilfe des Diagramms.

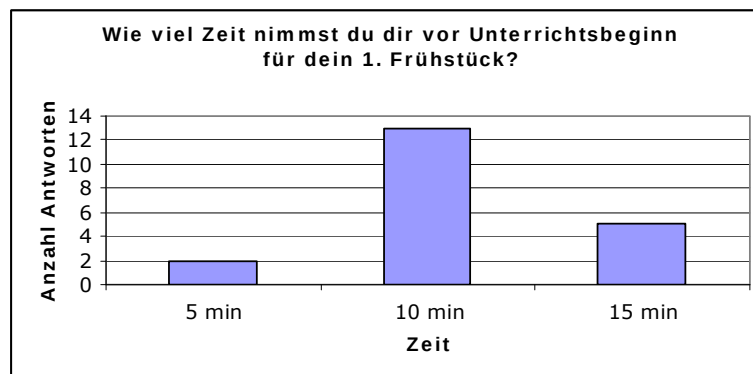
Verkehrsmittel	zu Fuß	Fahrrad	Bus	Auto
Anzahl Schüler				

- Erstelle mit den Daten der folgenden Tabelle ein Säulendiagramm.

Lieblingsfarbe	Rot	Gelb	Grün	Blau	Sonstige
Anzahl Kinder	7	1	2	3	5

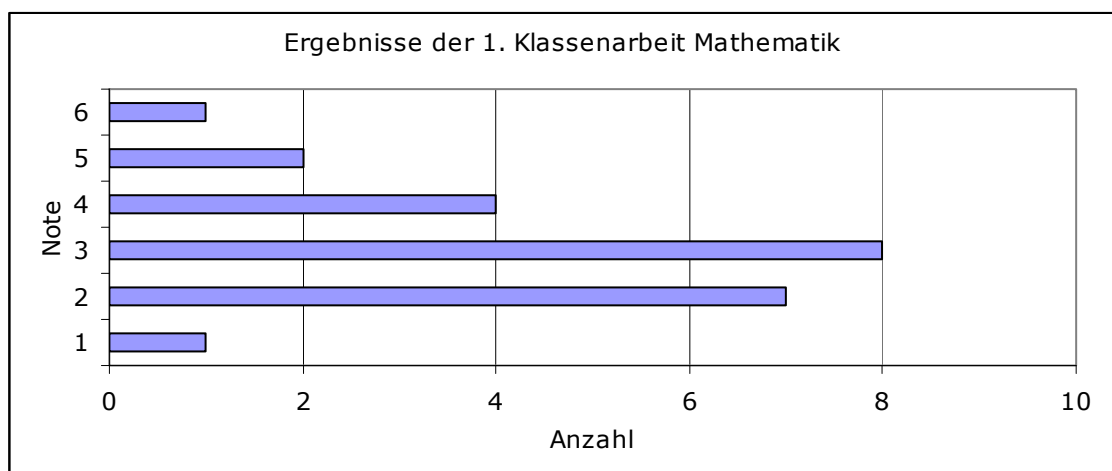
Von **Schülerinnen und Schülern**, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten Aufgaben bearbeitet werden, die über das Ablesen und Darstellen hinausgehen, z. B.:

- In der Klasse 6a sind 20 Schüler. Sie wurden danach befragt, wie viel Zeit sie sich für ihr erstes Frühstück nehmen. Im Diagramm siehst du das Ergebnis der Befragung.



Entscheide und begründe.

- Gibt es Schüler in dieser Klasse, die nicht vor Unterrichtsbeginn frühstücken? Begründe.
 - Gibt es Schüler in der Klasse, die länger als 15 min frühstücken?
- Beantworte mit Hilfe des Diagramms die folgenden Fragen:
 - Wie viele Schüler haben die Klassenarbeit mitgeschrieben?
 - Wie viele Schüler haben eine schlechtere Note als 3 geschrieben?
 - In der Klasse sind 27 Schüler. Wie viele Schüler haben diese Klassenarbeit nicht mitgeschrieben?



Aufgabe 2: Autobahn

Aufgabe

Familie Schmidt fährt auf der Autobahn in jeder Minute durchschnittlich 2,0 Kilometer. Nach einer Pause sagt der Sohn Peter:
„In der Zeit unserer Pause hätten wir 50 Kilometer fahren können.“

Wie lange hat Familie Schmidt Pause gemacht?

Familie Schmidt hat _____ Minuten Pause gemacht.

Lösung

25

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen einen quantitativen Zusammenhang zwischen Zeitdauer und gefahrener Streckenlänge erkennen (L4). Sie übertragen die realitätsnahe Situation in ein mathematisches Modell und schlussfolgern, dass sich die einander zugeordneten Werte proportional zueinander verhalten (K3). Familie Schmidt fährt durchschnittlich 2 Kilometer pro Minute, somit legt sie in 2 Minuten die doppelte Strecke und in 3 Minuten die dreifache Strecke ... zurück. Über die in der Wirklichkeit auftretenden Phasen von Beschleunigung und Abbremsen wird nichts gesagt. Diese werden mit dem Wort „durchschnittlich“ ausgeschlossen und bei der Modellierung nicht berücksichtigt.

Die Schülerinnen und Schüler könnten sich einen möglichen Lösungsweg durch eine Tabelle veranschaulichen und so zur Lösung kommen (K5):

Zeit in Minuten	Weg in Kilometer
1	2
...	...
25	50

Eine weniger ausführliche Lösungsmöglichkeit ist die sofortige Division von 50 (km) : 2 (km/min), um die Zeitdauer zu ermitteln, die die Familie für 50 km gebraucht hätte (K5).

Die Modellierung ist den Schülerinnen und Schülern vertraut und direkt erkennbar (AB I).

Fehler haben ihre Ursache vor allem darin, dass die Schülerinnen und Schüler den quantitativen Zusammenhang zwischen Zeitdauer und Streckenlänge nicht erkennen. Auch Rechenfehler sind möglich.

Zur **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Lösung erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, sollte man anschauliche Aufgaben zu proportionalen Zusammenhängen bearbeiten. Hier bieten sich Zuordnungen zwischen Ware und Preis, Stückzahl und Masse oder Maßstabtabellen an.

Weiterführende Aufgaben zum Thema, die eine Modellierung verlangen, könnten sich anschließen, z. B.:

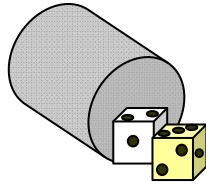
- Eine Schulklasse mit 13 Mädchen und 11 Jungen besucht in Münster den Allwetterzoo. Der Eintrittspreis für die Schulklasse beträgt 141,60 €. Die Lehrerin bezahlt als Begleitperson nichts.
 - a) Ermittle den Eintrittspreis für einen Schüler bzw. eine Schülerin, wenn man den Preis der Gruppenkarte auf die einzelnen Kinder aufteilt.
 - b) Fritz, dem der Besuch im Zoo gut gefallen hat, lädt seine fünf Freunde ebenfalls dorthin ein. Wie viel bezahlt er für sich und seine Freunde, wenn der reguläre Eintrittspreis ohne Gruppenrabatt 1,10 € pro Kind beträgt?
 - c) Eine Jahreskarte für den Allwetterzoo für Schüler kostet 35,00 €. Wie oft müsste Fritz als Einzelperson mindestens in den Zoo gehen, um die Jahreskarte auszunutzen?
- Sabines Schulweg beträgt 450 m. Sie benötigt für die Strecke im Durchschnitt 6 Minuten. Ihre Schulfreundin Lisa benötigt für ihren Schulweg im Durchschnitt 18 Minuten. Wie lang ist Lisas Schulweg, wenn man davon ausgeht, dass beide Mädchen mit der gleichen Geschwindigkeit in die Schule laufen?

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe lösen konnten, sollten komplexere Aufgaben mit realitätsnahen Problemen zu funktionalen Zusammenhängen angeboten werden, wie:

- Astrid möchte nach Eschwege in die Jugendherberge fahren. Eine Übernachtung mit Halbpension kostet 24,00 €. Ab dem 4. Tag sinkt der Preis für eine Übernachtung mit Halbpension auf 21,00 €.
 - a) Wie viel muss Astrid bezahlen, wenn sie 3 Übernachtungen mit Halbpension plant?
 - b) Sibylle will 7 Tage bleiben. Wie viel muss sie für die Übernachtungen mit Halbpension insgesamt bezahlen?
 - c) Manfred muss für seinen Aufenthalt in der Jugendherberge 219,00 € bezahlen. Wie lange war Manfred in der Jugendherberge, wenn er Übernachtung mit Halbpension gebucht hatte?
- Eine Stromrechnung für 8 Lampen beträgt bei täglich 8-stündiger Brenndauer 18 €. Welcher Betrag ist zu zahlen, wenn 12 Lampen mit gleicher Leistung in der gleichen Zeitspanne täglich 6 Stunden brennen?

Aufgabe 3: Zwei Spielwürfel

Aufgabe



Du würfelst mit zwei Spielwürfeln und addierst die Augenzahlen.
Welches Ergebnis ist **nicht** möglich? Kreuze an.

- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist größer als 2.
- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist ungerade.
- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist gerade.
- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist 1.
- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist kleiner als 6.

Lösung

- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist größer als 2.
- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist ungerade.
- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist gerade.
- ☒ Die Summe der Augenzahlen ist 1.
- ☐ Die Summe der Augenzahlen ist kleiner als 6.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1) Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler spielen gedanklich mögliche Ausgänge des Zufallsexperiments durch (L5, K2) und bestimmen so mögliche Summen der Augenzahlen (L1). Sowohl der Umgang mit den Spielwürfeln als auch die Addition von zwei einstelligen natürlichen Zahlen sind den Schülerinnen und Schülern gut vertraut (AB I).

Fehler treten auf, wenn die Schülerinnen und Schüler nur die Augenzahl eines Würfels betrachten und dann feststellen, dass alle vorgegebenen Ergebnisse möglich sind. Mehrfachnennungen deuten darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler aus der Fragestellung nicht entnommen haben, dass nur ein vorgegebenes Ergebnis nicht möglich ist oder den Hinweis „**nicht**“ nicht beachten. Fehler können auch auf unzureichender Lesegenauigkeit und Lesekompetenz gründen.

Für eine detaillierte **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihr Vorgehen bei der Lösung der Aufgabe zu beschreiben.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten noch einmal real würfeln, die Ergebnisse der einzelnen Würfe erfassen und mit entsprechenden Fragestellungen weiterarbeiten. Eine Tabelle unterstützt das Vorgehen. Auch der Begriff Summe kann dabei wiederholt werden.

- Führe jeweils zwei Würfe aus und addiere die Augenzahlen. Schreibe die Ergebnisse in einer Tabelle auf.

Augenzahl erster Würfel	Augenzahl zweiter Würfel	Summe der Augenzahlen
1	6	7
...		

Unterschiedliche Verknüpfungen der Augenzahlen, wie zum Beispiel ihr Produkt bilden oder Verdoppelung der Summe, können für weitere Übungen eingesetzt werden.

Den Schülerinnen und Schülern kann die folgende Aufgabe gestellt werden:

- Gib die möglichen Summen der Augenzahlen beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln an. Nutze die folgende Tabelle.

+						
	2	3				
	3	4				
						
						
						
						

Statt der Summe können auch andere Verknüpfungen der Augenzahlen gewählt werden.

Durch gezielte Fragestellungen können die gewonnenen Ergebnisse aus der Tabelle analysiert werden:

- Kennzeichne die größte (die kleinste) Summe der Augenzahlen.
- Begründe, warum diese die kleinste (die größte) Summe der Augenzahlen ist.
- Welche Summe von Augenzahlen kommt am häufigsten vor?

Für Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, bieten sich folgende Aufgaben an:

- Es wird dreimal gewürfelt. Schreibe **alle** möglichen Augenzahlen und die sich daraus ergebenden Summen der Augenzahlen systematisch in einer Tabelle auf.

Augenzahl erster Würfel	Augenzahl zweiter Würfel	Augenzahl dritter Würfel	Summe der Augenzahlen
1	1	1	3
...			

Der Hinweis auf systematisches Vorgehen sollte unbedingt gegeben werden, damit die Schülerinnen und Schüler auch alle möglichen Spielausgänge erfassen. Diese Ergebnisse können ebenfalls unter verschiedenen Gesichtspunkten analysiert werden:

- Kennzeichne die größte und die kleinste Summe der Augenzahlen.
- Begründe, warum diese die kleinste bzw. die größte Summe der Augenzahlen ist.
- Welche Summe von Augenzahlen kommt am häufigsten vor?
- Woher weißt du, dass du alle Spielausgänge erfasst hast?

Aufgabe 4: Buchstabensymmetrie

Aufgabe

Überprüfe die Symmetrieeigenschaften der abgebildeten Großbuchstaben. Schreibe alle Großbuchstaben auf, die **zwei** Symmetrieachsen haben.

A C F G K
 L M O O
R T U X Y

Folgende Großbuchstaben haben **zwei** Symmetrieachsen:



Lösung

O und X

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler wenden ihr Wissen über Achsensymmetrie auf die abgebildeten Buchstaben an. Sie müssen die Buchstaben sowohl auf senkrechte als auch auf waagrechte Symmetrieachsen untersuchen. Dies stellt einen mehrschrittigen Prozess dar. (L3, K4, AB II).

Fehler könnten darin begründet sein, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Spiegelung an **einer** senkrechten oder waagrechten Symmetrieachse, die fehlerhafte Vorstellung zugrunde legen, dass die Zerlegung in zwei kongruente Hälften gleichbedeutend ist mit **zwei** Spiegelachsen. In diesem Fall werden zusätzlich die Buchstaben A, C, M, T, U und Y genannt.

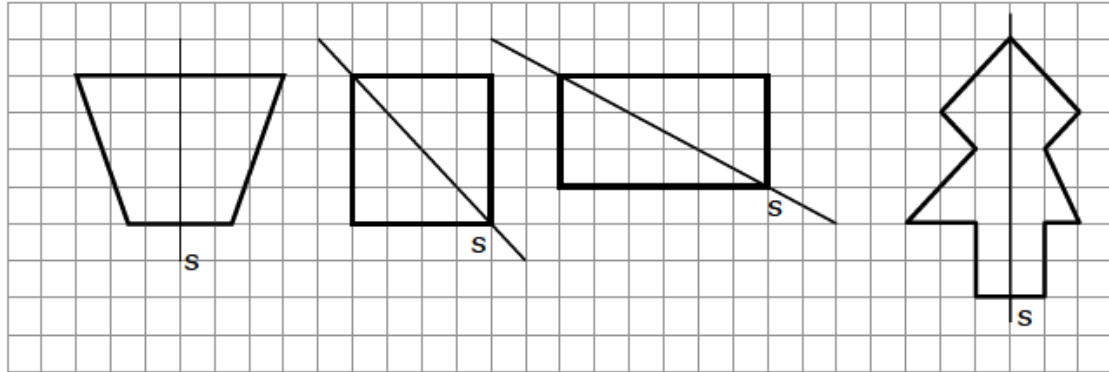
Zur **Diagnose** von Fehlern sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihr Vorgehen bei der Überprüfung zu beschreiben und zu begründen.

Hinweise zur Weiterarbeit

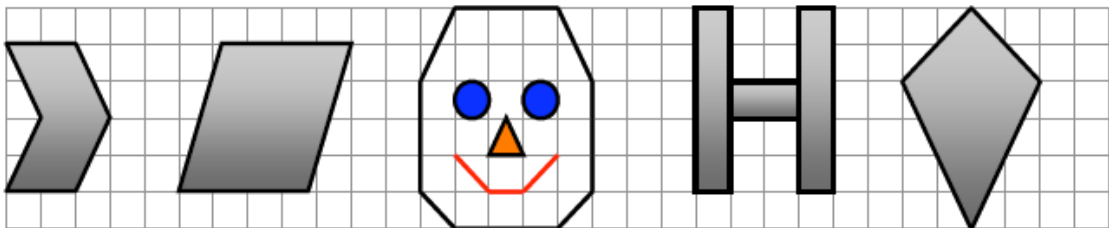
Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, sollte der Begriff „Achsensymmetrie“ zunächst wiederholt werden.

So kann zum Beispiel mit Hilfe eines Spiegels Achsensymmetrie überprüft werden. An vielfältigen einfachen Beispielen sollte der Begriff dann gefestigt werden.

- Überprüfe, ob die Gerade s Symmetrieachse der Figur ist.



- Untersuche, ob die Figuren achsensymmetrisch sind. Wenn ja, zeichne alle Symmetrieachsen ein.



- Beschreibe, wie du überprüfen kannst, ob eine Figur eine (zwei, drei, vier, ...) Symmetrieachse(n) besitzt.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können versuchen Worte zu finden bzw. zu bilden, die achsensymmetrisch sind wie z. B. OHO, OMO, UHU, OTTO.

Es können auch Figuren betrachtet werden, bei denen die Gestaltung der Fläche bei der Achsensymmetrie berücksichtigt werden muss.

- Welche Flaggen haben mehrere Symmetrieachsen?



I



II



III



IV



V



VI

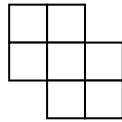


VII

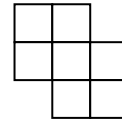
Schülerinnen und Schüler könnten auch selbst Färbungen nach Symmetriebedingungen vornehmen.

- Färbe die Karos so (bei jeder Figur mindestens eins), dass die entstandene Figur

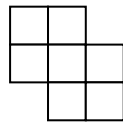
a) punkt- aber
nicht achsensymmetrisch



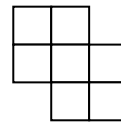
b) achsen- aber nicht
punktsymmetrisch



c) weder punkt- noch
achsensymmetrisch



d) punkt- und
achsensymmetrisch

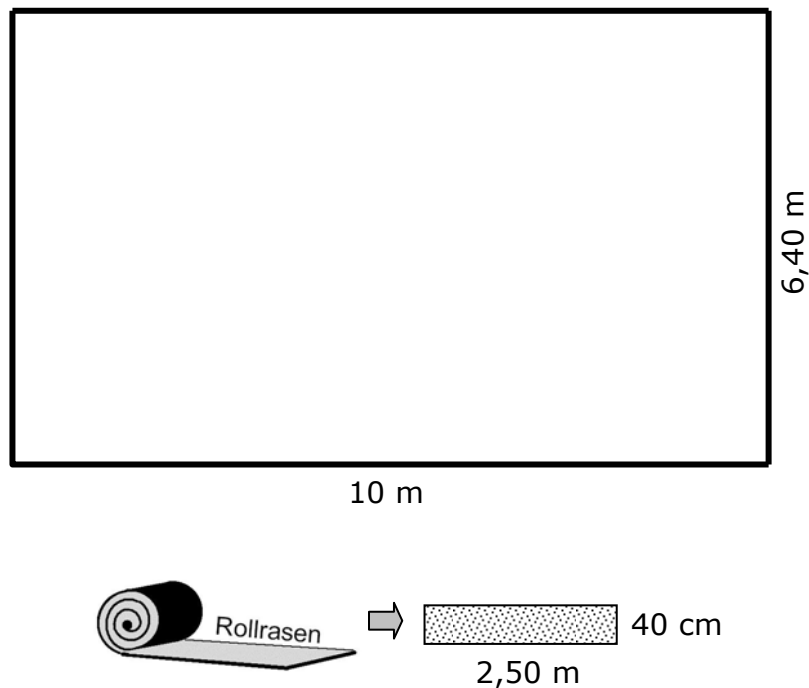


ist.

Aufgabe 5: Rollrasen

Aufgabe

Familie Lenz bekommt einen neuen Rasen in ihren kleinen Garten. Sie hat sich für das Verlegen von Rollrasen entschieden. Das Bild zeigt dir die Größe des Gartens und die Maße des Rasenstücks, das sich aus einer Rasenrolle ergibt.



Wie viele Rasenrollen werden für den Garten von Familie Lenz benötigt?

Für den Garten von Familie Lenz werden _____ Rasenrollen benötigt.

Lösung

64

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Abbildung die Maße und die geometrische Form der Gartenfläche und des Rasenstücks, das sich aus einer

Rasenrolle ergibt (K4). Die praktische Situation muss von ihnen anschließend in eine geeignete mathematische Struktur übersetzt (K3 - z. B. gedankliche Analogie zum Arbeitsvorgang) und mit dieser die Anzahl der benötigten Rasenrollen bestimmt werden (L2, K5).

Das Vorgehen zur Lösung ist mehrschrittig (AB II).

Mögliche **Fehler** sind, dass die Schülerinnen und Schüler

- nicht erkennen, dass 10 m ein Vielfaches von 2,50 m bzw. 6,40 m ein Vielfaches von 40 cm ist,
- die unterschiedlichen Maßeinheiten nicht berücksichtigen oder
- sich verrechnen.

Zur **Diagnose** ist eine Nachbesprechung der Aufgabe im Unterricht sinnvoll, bei der Lösungsgedanken bzw. aufgetretene Probleme hinterfragt werden können.

Hinweise zur Weiterarbeit

In der weiteren Unterrichtsarbeit kann das Anordnen von Teilflächen bzw. das Zerlegen von Flächen Gegenstand sein.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, sollte das Erkennen Vielfacher vorgegebener Längenmaße geübt werden:

- Entscheide jeweils (mit: ja / nein), ob die Maßangabe ein Vielfaches der Vorgabe ist:

Maßangabe Vorgabe	3 m	5,20 m	7,50 m	8,40 m	10 m
2,50 m	nein				
2,10 m	nein				
1,50 m	ja				

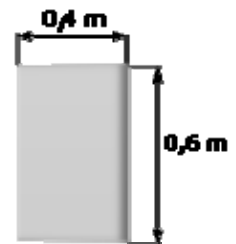
Die Anforderung kann gesteigert werden, wenn Maßeinheiten zu beachten sind:

- Entscheide jeweils (mit: ja / nein), ob die Maßangabe ein Vielfaches der Vorgabe ist:

Maßangabe Vorgabe	3 m	5,20 m	7,50 m	8,40 m	10 m
40 cm		ja			
200 cm					
260 cm					

Weiterhin können die Schülerinnen und Schüler das Auslegen von Flächen üben, z. B.:

- Eine rechteckige Fläche von 3,20 m Länge und 3 m Breite soll mit Gehwegplatten (siehe Abbildung) ausgelegt werden.



Skizziere eine mögliche Anordnung der Gehwegplatten auf dieser Fläche. Wie viele Gehwegplatten werden benötigt?

Variationsmöglichkeiten:

- Verlegerichtung beliebig, bei entsprechender Wahl der Maße der Gehwegplatten
- Verlegerichtung vorgegeben, mit der Option auch halbe Gehwegplatten zu benutzen

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgaben lösen konnten, können durch das Einbeziehen komplexerer Legeteile gefördert werden. Zu empfehlen sind hier Pentominos, Würfelnetze (Hexominos), zumal sie geeignet sind, die Ebene lückenlos zu parkettieren, oder andere Formenspiele. (siehe auch /3/ 2009, Testheft A)

- Lege mit Hilfe der Legeteile die Gesamtfiguren.

Pentominos	Würfelnetze	EXI

Aufgabe 6: Brüche

Aufgabe

Ergänze eine Zahl, so dass eine wahre Aussage entsteht.

$$\frac{2}{5} + \boxed{} = 1$$

Lösung

Richtige Ergänzung: $\frac{3}{5}$ oder ein gleichwertiger Bruch

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass gilt: $1 = \frac{5}{5}$. Sie erkennen, dass von $\frac{2}{5}$ bis $\frac{5}{5}$ noch $\frac{3}{5}$ zu ergänzen sind, oder sie rechnen $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ (L1, K5, AB I).

Das Fehlen der Lösungszahl oder **Fehler** bei den notierten Ergebnissen deutet darauf hin, dass eine Sinn tragende Vorstellung von Brüchen fehlt, oder dass es sich um einen Rechenfehler handelt.

Hinweise zur Weiterarbeit

Zur Entwicklung sicherer Fähigkeiten im Umgang mit gebrochenen Zahlen sollten im Unterricht handlungsorientierte und bildlich unterstützte Übungen einbezogen werden, bevor abstrakte Aufgabenstellungen bearbeitet werden.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, können z. B. den Auftrag erhalten, vorgegebene quadratische Faltblätter gleicher Größen (auch kreisförmige Faltblätter sind möglich) durch Falten in 2; 4; 8 bzw. 16 gleiche Teile einzuteilen, jeweils einen Bruchteil auszumalen und mit dem Wert des Bruchteils ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$) zu beschriften.

Als Folgeaufgabe können die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, für jedes Faltblatt zu beschreiben, welcher Bruchteil ungefärbt ist. Ein Übergang zum Zeichnen auf kariertem Papier ermöglicht weitere Bruchdarstellungen an verschiedenen Figuren. Zwischen gefärbtem und ungefärbtem Anteil zu unterscheiden, bereitet auch hierbei auf Ergänzungsaufgaben vor.

Es könnten sich Erkennungsaufgaben anschließen wie:

- In jeder Figur sind die einzelnen Teile gleich groß.
Welcher Bruchteil ist gefärbt? Welcher Bruchteil ist ungefärbt?

gefärbt				
ungefärbt				

Hier ergibt sich eine **Differenzierungsmöglichkeit**. Der Auftrag kann leistungsabhängig erweitert werden durch die Forderung nach der Angabe des jeweils vollständig gekürzten Bruches. Es kann auch nach einer Probemöglichkeit zu den angegebenen Brüchen gefragt werden.

Mit der zeichnerischen Variante kann auch die Ergänzung zu einem Ganzen erarbeitet und geübt werden, z. B.:

- Dieses Bruchstück ist $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; ...) von einem Ganzen.

Zeichne ein Ganzes.

- Dieses Bruchstück ist $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; ...) von einem Ganzen.

Wie könnte das Ganze ausgesehen haben? Zeichne zwei verschiedene Möglichkeiten.

- Dieses Bruchstück ist $\frac{3}{5}$ von einem Ganzen.

Ergänze die Figur zu einem Ganzen. Zeichne vier verschiedene Möglichkeiten.

Die Forderung nach der Angabe mehrerer Möglichkeiten ist auch zur Differenzierung für Schülerinnen und Schüler geeignet, die die Aufgabe lösen konnten.

Das Herangehen an verbale Abfragen von Ergänzungen zu eins (oder auch zum nächsten Ganzen) lässt erkennen, ob die Schülerinnen und Schüler die Lösung der Aufgabe abstrakt oder durch Zeichnung bestimmen.

- Wie viele fehlen zum nächsten Ganzen? Erläutere dein Vorgehen.

a) Bei $\frac{7}{12}$ fehlen . b) Bei $1\frac{3}{5}$ fehlen .

Das Ausfüllen von Lücken in Gleichungen könnte nach diese Vorbereitung in vielfältigen Varianten folgen.

- Ergänze eine Zahl, so dass eine wahre Aussage entsteht.

$\frac{2}{5} + \text{} = 1$ oder $1 - \text{} = \frac{2}{5}$

Übungen zum Operieren mit Brüchen, insbesondere das Addieren und Subtrahieren von gleichnamigen Brüchen, bauen die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zur rechnerischen Lösung von Aufgaben wie der Testaufgabe aus.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten, können Aufgaben bearbeiten, die auf die Ergänzung zu einem Vielfachen von 1 zielen. Dabei können auch Gleichungen mit mehreren Summanden, anderen Rechenoperationen oder Dezimalbrüche auftreten.

Wird der Anforderungsbereich für diese Schülerinnen und Schüler erhöht, werden häufig noch die Kompetenzen K3 und K2 benötigt, z. B.:

- Gib drei (vier, fünf) Brüche an, deren Summe 1 ergibt.
Schreibe mindestens drei verschiedene Möglichkeiten auf.
- Fünf Achtel der Mitglieder eines Sportvereins spielen Fußball. Ein Drittel der Fußballspieler, das sind 20 Personen, spielen auch Volleyball.
Wie viele Mitglieder hat der Verein?
(siehe auch /5/ 2007, Aufgabe 15)

Aufgabe 7: Geldproblem

Aufgabe

Jens muss seinem Freund Marc noch 4,20 € zurückgeben. Er hat aber nur einen 5 Euro - Schein und drei 10 Cent - Münzen.

Marc findet in seiner Jackentasche noch einen Euro.

Wie können die beiden Jungen das Problem lösen?



Lösung

Jens gibt Marc 5,20 € und Marc gibt ihm 1 € zurück.
(Auch sinngemäße Formulierungen werden als richtig anerkannt.)

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei dieser Aufgabe geht es um eine Verteilung von Geldbeträgen (L2) durch geschickte Summen- und Differenzbildung (K5). Der mathematische Wert der Aufgabe liegt weniger in der Anwendung elementarer Rechnungen als vielmehr in der geschickten Herangehensweise beim Auffinden der geeigneten Rechnung (K2). Das Vorgehen bei der Problemlösung ist mehrschrittig (AB II). Es muss zunächst erkannt werden, dass die naheliegende Lösung – Übergabe von 5,00 € und Rückgabe von 0,80 € Wechselgeld – durch die Vorgaben der Aufgabenstellung nicht möglich ist. Jens muss die ihm verfügbaren Einzelbeträge zu 5,20 € kombinieren, damit durch die Rückgabe von 1,00 € durch Marc ein Ausgleich erfolgen kann.

Als mögliche **Fehler** sind vor allem elementare Rechenfehler bzw. Schwierigkeiten im Umgang mit dem Dezimalsystem (Erkenntnis dass 10 ct gleich 0,10 € sind) zu erwarten.

Bei der Bewertung der Aufgabe werden Lösungsvorschläge nicht berücksichtigt, bei denen die Schülerinnen und Schüler der Mathematik ausweichen, z. B. indem sie vorschlagen, dass der 5 Euro – Schein woanders gewechselt werde, oder dass Marc 80 Cent Schulden an Jens behält, um sie zu einem anderen Zeitpunkt zu begleichen.

Da die Aufgabe in Textform gegeben ist, kann mangelnde Lesefähigkeit zu Problemen im Verständnis der Aufgabenstellung führen, was eine Lösung ganz verhindern kann.

Eine **Diagnose** dieses Falls ist anhand der Lösung nur schwer möglich und muss im Unterricht erfolgen. Wenn die Schülerinnen und Schüler nicht erkannt haben, dass Marc zwar Geld bekommen soll, aber auch Geld abgeben muss, bieten ggf. die notierten Lösungsversuche Aufschluss, wenn hier der eine Euro von Marc keine Rolle spielt.

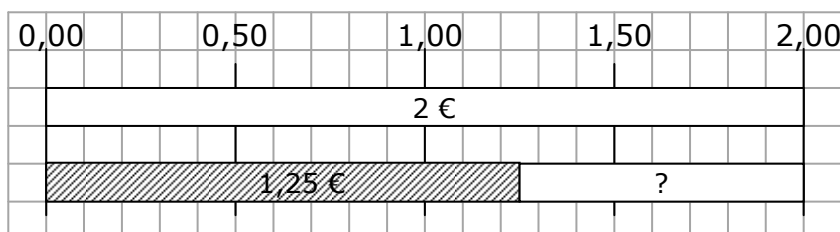
Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können zunächst an leichteren Aufgaben das Rechnen mit Wechselgeld üben, wobei sich verschiedene Varianten anbieten:

- Malte kauft sich Süßwaren für 1,25 €. Er bezahlt mit einer 2 Euro - Münze. Berechne das Wechselgeld, das Malte bekommt.
- Herr Schnapp bezahlt im Restaurant seine Rechnung mit einem 20 Euro - Schein. Er hatte nicht genau verstanden, welchen Rechnungsbetrag der Kellner genannt hatte, aber mit Hilfe des Wechselgeldes von 2,30 € kann er nachrechnen, wie viel er bezahlt hat. Wie groß war der Rechnungsbetrag?
- Katrin verkauft auf dem Flohmarkt ein Stofftier für 1,50 €. Die Kundin möchte mit einem 10 Euro - Schein bezahlen. Katrin findet in ihrer Kasse fünf 1 Euro - Münzen und fünf 50 Cent - Münzen Wechselgeld. Überprüfe, ob Katrins Wechselgeld für diesen Kauf ausreicht.

Falls solche Aufgaben Mühe bereiten, kann auch das Hantieren mit Spielgeld oder die Veranschaulichungen mit Streifenbildern hilfreich sein, z. B.:

- Ergänze den fehlenden Geldbetrag.



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können weiter gefördert werden durch komplexere Aufgabenstellungen, z. B.:

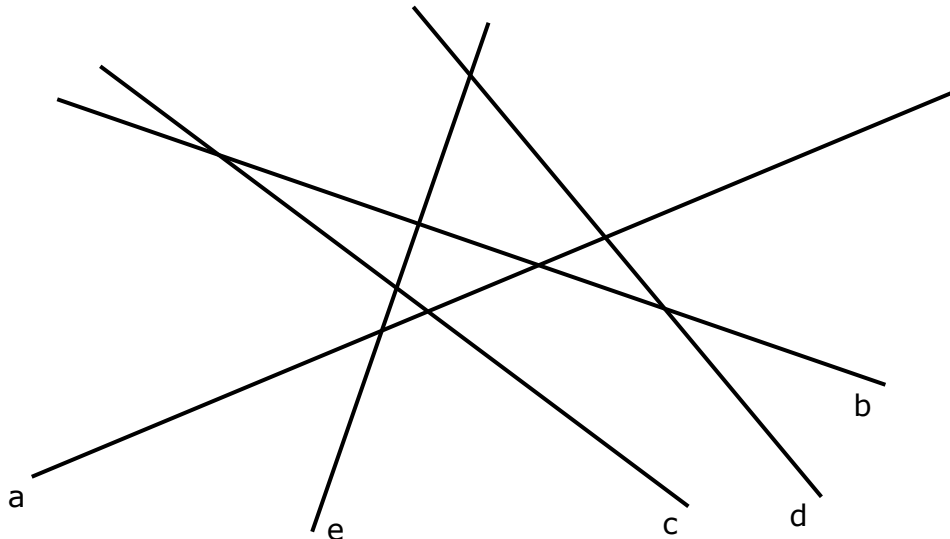
- Tina und Nina wollen zusammen ein Getränk für 1,50 € aus einem Automaten kaufen. Am Automaten leuchtet ein Schild mit der Aufschrift „Automat gibt kein Wechselgeld“. Tina hat zwei 50 Cent - Münzen, eine 10 Cent - Münze und eine 5 Cent - Münze. Nina hat eine 1 Euro - Münze und drei 20 Cent - Münzen. Können sie gegenseitig ihre Münzen so tauschen, dass jede genau die Hälfte des Getränks bezahlt? Schreibe auf, wie du bei der Lösung vorgegangen bist.

Auch Kontextänderungen, z. B. zu Aufgaben mit unvollständigen Wägesätzen, bieten sich für weiter führende Übungen an.

Aufgabe 8: Lagebeziehungen von Geraden

Aufgabe

Genau zwei der Geraden a, b, c, d und e stehen senkrecht aufeinander. Kreuze an.



a und b

☐

a und c

☐

a und e

☐

b und e

☐

d und a

☐

Lösung

a und b

☐

a und c

☐

a und e

☐

b und e

☒

d und a

☐

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die Lage der dargestellten Geraden paarweise gedanklich und erkennen inhaltlich die Orthogonalität (stehen senkrecht aufeinander) der beiden Geraden b und e in der Abbildung. Sie wählen die richtige Antwortmöglichkeit (L3, K4, AB II).

Ursachen für **Fehler** können sein:

- Die Schülerinnen und Schüler kennen die Eigenschaft der Orthogonalität (stehen senkrecht aufeinander) nicht und besitzen auch keine Vorstellung davon.

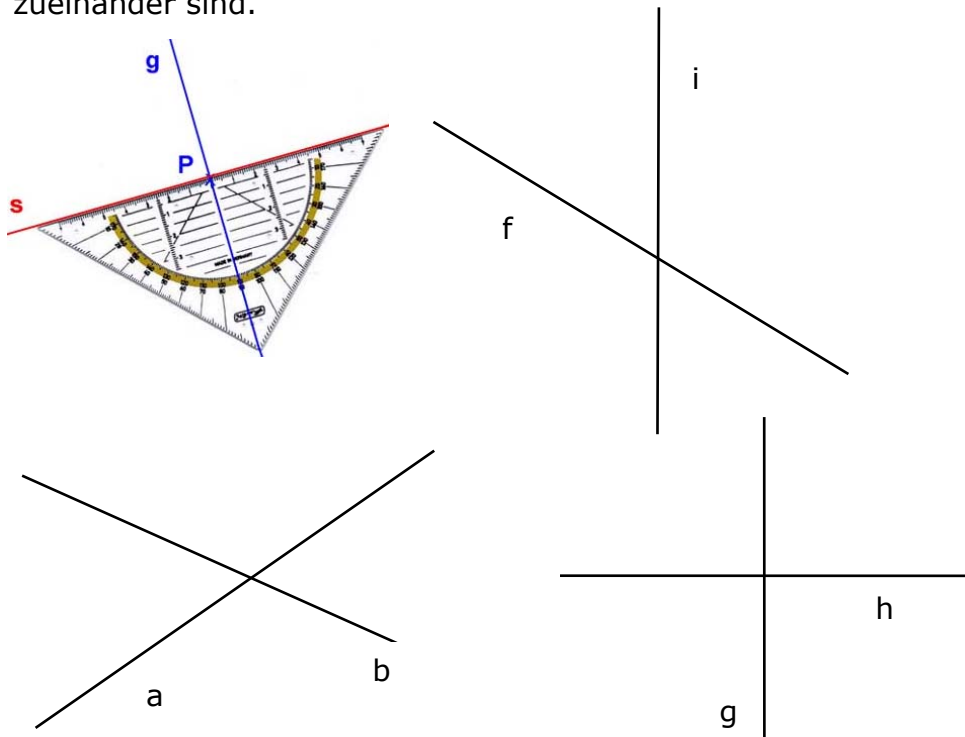
- Das ungenaue Lesen der Aufgabenstellung („Genau zwei der Geraden ...“) kann zu Mehrfachnennungen führen.
- Die Schülerinnen und Schüler lassen sich durch die vielen ineinander laufenden Geraden verwirren oder nennen auch „ungefähr“ senkrechte Geradenpaare, die geforderte Zeichengenauigkeit wird vernachlässigt.

Für die **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Lösung zu erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe hatten, sollten im Unterricht zuerst die Lagebeziehung „senkrecht zueinander“ von nur zwei Geraden noch einmal unter Verwendung des Geodreiecks erarbeiten und festigen.

- Überprüfe mit Hilfe des Geodreiecks ob die folgenden Geraden senkrecht zueinander sind.



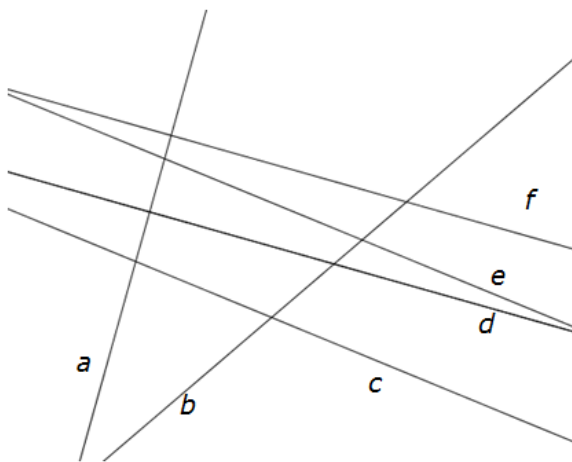
- Zeichne zwei Geraden
 - a) die senkrecht zueinander sind,
 - b) die sich schneiden, aber nicht senkrecht zueinander sind.

Nach der Betrachtung dieser Fälle kann eine dritte Gerade hinzugenommen und weiter differenziert werden:

- Zeichne drei Geraden so, dass genau zwei der Geraden senkrecht zueinander sind.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, bietet sich an, komplexere Anordnungen von Geraden nach den Lagebeziehungen der Orthogonalität und Parallelität zu untersuchen.

- Zeichne vier Geraden so, dass jeweils genau zwei der Geraden senkrecht zueinander sind.
- Gib an, welche Geraden zueinander senkrecht und welche Geraden zueinander parallel sind.



Wie dabei systematisch vorgegangen werden kann, um keine Relation zu vergessen, sollte thematisiert werden.

	a	b	c	d	e	f
a				?		?
b						
c					?	
d	?					?
e			?			
f	?			?		

Aufgabe 9: Turm aus Bausteinen

Aufgabe

Drei gleiche quaderförmige Bausteine haben jeweils die folgenden Maße:

- 30 cm Länge,
- 20 cm Breite und
- 10 cm Höhe (Tiefe).

Sie werden zu einem Turm aufeinander gestellt.

a) Wie hoch ist ein Turm aus den drei Bausteinen mindestens?

Der Turm ist mindestens _____ cm hoch.

b) Welche Turmhöhe ist mit den drei Steinen **nicht** möglich? Kreuze an.

- ☐ 100 cm
- ☐ 80 cm
- ☐ 70 cm
- ☐ 60 cm
- ☐ 40 cm

Lösung

a) 30

- b) ☒ 100 cm
- ☐ 80 cm
 - ☐ 70 cm
 - ☐ 60 cm
 - ☐ 40 cm

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2) Raum und Form (L3)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) nur bei a): Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	a) AB I b) AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Aufgabenteil a)

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen dem Text die geometrische Form sowie die Maße eines Bausteins und sie interpretieren das Wort „mindestens“ (K6). Die Problemstellung erfordert, dass sie heuristische Hilfsmittel und Strategien nutzen und dabei gedanklich mit den Maßen des Bausteins operieren, um diejenige Lage zu finden, bei der die Höhe des Bausteines am geringsten ist (L2, L3, K2).

Aus der minimalen Höhe jedes der drei Bausteine wird die gesuchte Höhe des Turms bestimmt (K5, AB I).

Die Schülerinnen und Schüler können auch von einer Skizze des Turmes ausgehen, um seine Höhe zu ermitteln.

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht erkennen, dass die minimale Turmhöhe (Mindesthöhe) bestimmt werden soll. Ebenso könnte es sein, dass sie nicht alle drei Steine verwenden.

Zur detaillierten **Diagnose** können die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise im Unterricht erläutern.

Aufgabenteil b)

Zur Lösung des vorliegenden Problems nutzen die Schülerinnen und Schüler heuristische Hilfsmittel und Strategien, wobei sie gedanklich mit geometrischen Objekten operieren (L3, K2). Sie überprüfen dabei, ob sich die vorgegebenen Turmhöhen aus Kombinationen der Kantenlängen ergeben (L2). Dazu bilden die Schülerinnen und Schüler Summen aus jeweils drei Steinhöhen (K5). Der Lösungsvorgang ist mehrschrittig (AB II).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler jeweils alle drei Bausteine in der gleichen Lage betrachten, also nicht erkennen, dass sich jeder Baustein in einer anderen Lage befinden kann.

Es ist ebenfalls möglich, dass Sie nicht beachten, dass genau drei Bausteine zu verwenden sind. Es sind dann alle Turmhöhen möglich.

Werden mehrere Auswahlmöglichkeiten angekreuzt, haben die Schülerinnen und Schüler aus der Fragestellung nicht entnommen, dass nur eine Turmhöhe nicht möglich ist.

Für die **Diagnose** der Fehlerursache ist es hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen im Unterricht erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgaben nicht lösen konnten, sollten zunächst auf der gegenständlichen Ebene aus drei oder mehreren gleichen quaderförmigen Bausteinen Türme bauen und jeweils die Höhe der Türme bei unterschiedlicher Lage der Bausteine aus vorgegebenen Kantenlängen ermitteln.

Bezüglich der Aufgabe b) kann es hilfreich sein, vorgegebene Zahlen als Summe aus drei Summanden darzustellen. Dabei sollten die möglichen Summanden so zur Auswahl angeboten werden, dass mehrere Varianten für die Summenbildung bestehen.

Für den Unterricht bieten sich auch die folgenden Aufgabenstellungen an:

- Bei einem Spielwürfel sind alle Kantenlängen 1 cm lang.
 - Stelle 10 Spielwürfel aufeinander. Wie hoch wird der Spielwürfelturm?
 - Gibt es weitere Turmhöhen, wenn du diese 10 Spielwürfel aufeinander stellst?

- Die Bausteine des Spieles „Wackelturm“ haben die Kantenlängen $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ und $c = 1 \text{ cm}$.
 - Lege 10 Bausteine mit der größten Fläche nach unten aufeinander. Wie hoch wird der Turm?
 - Stelle die Bausteine auf die kleinste Fläche. Wie hoch wird der Turm, wenn 4 Bausteine in dieser Lage aufeinander gestellt werden?
- Hans und Lise spielen mit Würfeln aus Holz. Es gibt zwei unterschiedliche Größen. Der eine Würfel hat eine Kantenlänge von 5 cm, der andere eine Kantenlänge von 6 cm. Hans stapelt alle Würfel mit 6 cm Kantenlänge, Lise alle mit einer Kantenlänge von 5 cm aufeinander. Lise hat 20, Hans nur 17 Würfel.
Wessen Turm wird höher?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgaben lösen konnten, können weitere Aufgabenvariationen zum „Wackelturm“ bearbeiten, bei denen die Bausteine jeweils in verschiedenen Lagen verwendet werden.

z. B.:

- Welche Türmhöhen sind theoretisch möglich, wenn man 10 Bausteine hat? Gib 5 Möglichkeiten an.

oder:

- Postpakete können die in der Tabelle angegebenen Abmessungen haben.

Größe	Länge in mm	Breite in mm	Höhe in mm
1	250	175	100
2	350	250	120
3	400	250	150
4	500	300	200

- Wie viele Kartons der Größe 1 passen höchstens in einen Karton der Größe 4?
- Wie viele Kartons der Größe 2 passen höchstens in einen Karton der Größe 4?

oder:

- Ayla und Ahmed spielen mit einem Kartenspiel, bei dem auf jeder Karte eine Zahl zu lesen ist. Folgende Karten liegen vor ihnen:

7	14	3	26	8
---	----	---	----	---

Sie bilden die Summe der Zahlen von jeweils zwei Karten.
Markiere die Zahlen, die dabei als Summe **nicht** vorkommen können.

21	17	25	11	15	24
33	10	9	16	28	32
22	12	18	39	14	27

Aufgabe 10: Glasscheibe

Aufgabe

Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 20 cm breit.

Heiner sagt: „Ich kann acht kleine rechteckige Glasscheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite so ausschneiden, dass ein rechteckiger Streifen von 24 cm mal 4 cm übrig bleibt.“

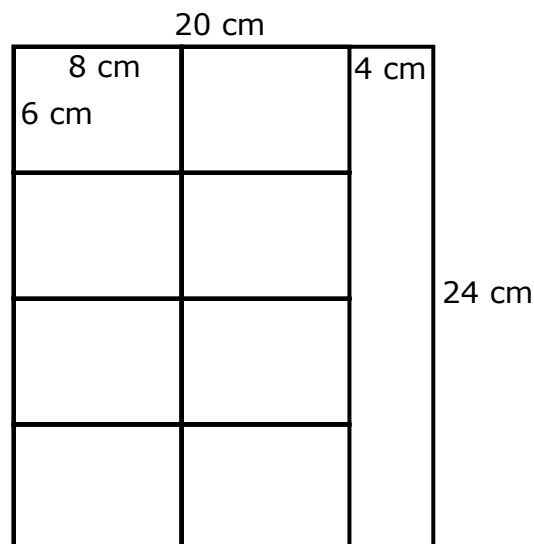
Begründe, dass Heiner Recht hat.



Lösung

Richtige vollständige Begründung, z. B.:

- (1) Skizze mit 8 kleinen Scheiben und Kennzeichnung des Streifens von 24 cm mal 4 cm



- (2) verbale Beschreibung der Anordnung der kleinen Glasscheiben und der Maße des Reststückes

- (3) ...

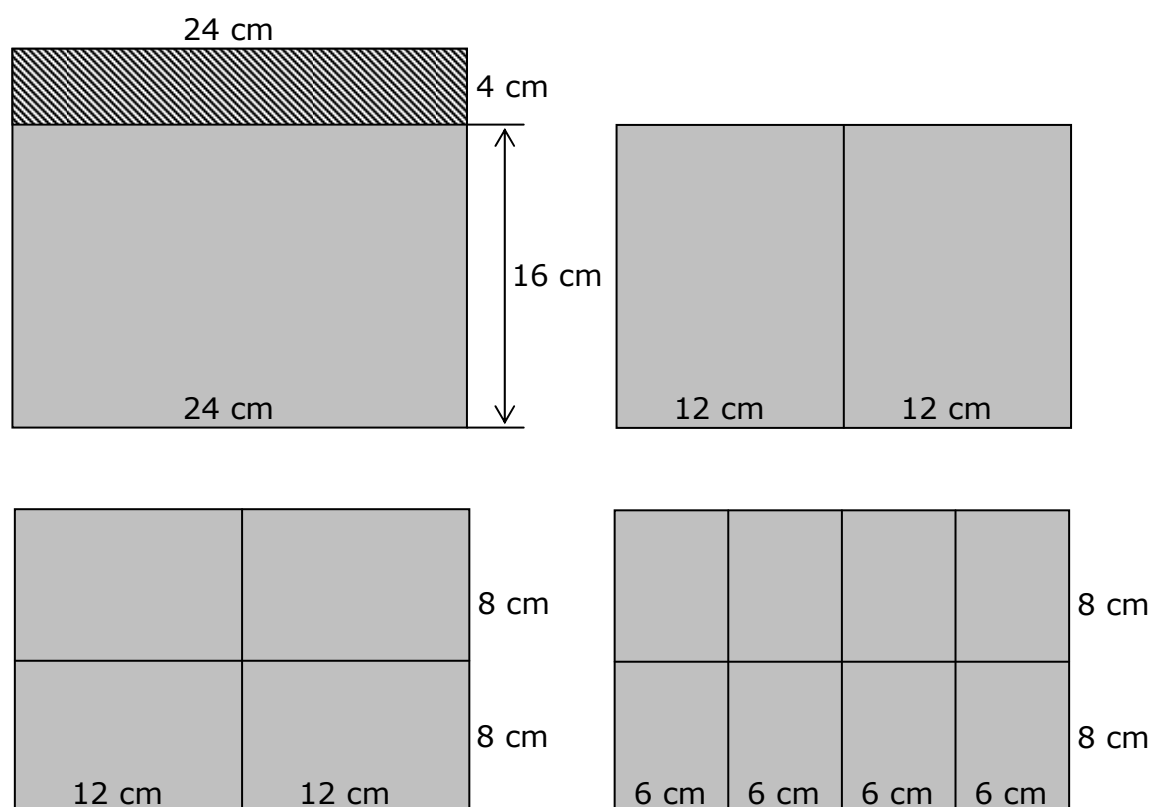
Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2) Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Lösen der Aufgabe nutzen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über Eigenschaften von Rechtecken (L3) und das Grundprinzip des Messens (L2). In Abhängigkeit von der Art des Lösens werden die Schülerinnen und Schüler zeichnerische Darstellungen oder rechnerische bzw. verbale Argumentationen verwenden (K4, K5, K1). Die gewählte Strategie erfordert in jedem Fall mehrere Schritte (K2, AB II).

Die Schülerinnen und Schüler nutzen heuristische Strategien zur Bearbeitung der Aufgabe. Sie könnten zuerst von dem Rechteck (24 cm x 20 cm) das Restrechteck abschneiden (24 cm x 4 cm), um dann zu ermitteln, wie groß das Rechteck ist, das in 8 gleichgroße rechteckige Teile (8 cm x 6 cm) zerlegt werden soll. Dieses wird zeichnerisch durch fortgesetzte Halbierung weiter zerlegt, bis 8 gleichgroße Rechtecke erreicht sind. Bei jedem Teilungsschritt sollten die Seitenlängen der Teilrechtecke bestimmt werden. Das Problem ist gelöst und die Argumentation ist vollständig, wenn sie für jedes der kleinen Rechtecke die Seitenlängen 8 cm und 6 cm angegeben haben.



Zur Lösung können die Schülerinnen und Schüler auch kommen, indem sie das zu teilende Rechteck mit der Länge von 24 cm und der Breite von 16 cm erkennen und die Maßzahlen der Länge und Breite auf Teilbarkeit durch 6 und 8 untersuchen. Sie wissen, dass 24 ein Vielfaches von 8 und ein Vielfaches von 6 ist, aber 16 nur ein Vielfaches von 8. Daraus können sie schlussfolgern, dass sie die Breite (16 cm) nur in zwei 8 cm – Stücke und damit die Länge (24 cm) in vier 6 cm - Stücke zerlegen können. Mit der anschließenden Rechnung $2 \cdot 4 = 8$ (Rechtecke) ist die Aussage von Heiner begründet.

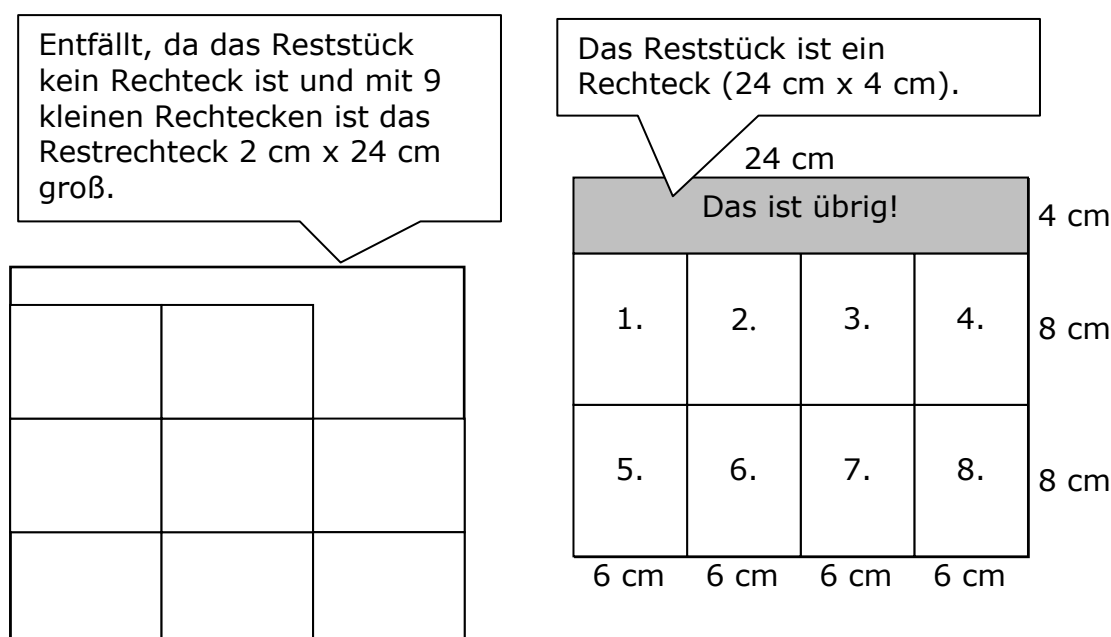
Die Schülerinnen und Schüler könnten analog auch im ursprünglichen Rechteck (24 cm x 20 cm) untersuchen, auf welche Weise 8 Rechtecke (8 cm x 6 cm) herausgeschnitten werden können, damit ein Restrechteck von 24 cm mal 4 cm übrig bleibt. Im Rechenfeld könnten dann folgende Rechnungen erkennbar werden:

$$24 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 480 \text{ cm}^2; 8 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2; 48 \text{ cm}^2 \cdot 8 = 384 \text{ cm}^2; 480 \text{ cm}^2 - 384 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2 \text{ und } 4 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^2$$

Bei einer solchen rechnerischen Argumentation fehlt jedoch die Anordnung der Scheiben.

Oder: $24 \text{ cm} : 6 \text{ cm} = 4$ und $20 \text{ cm} : 8 \text{ cm} = 2 \text{ Rest } 4$, aus dem Rest 4 ergibt sich der 4 cm breite Reststreifen.

Für ein zeichnerisch unterstütztes Probieren ist es nahe liegend, dass Schülerinnen und Schüler das Raster des Rechenfeldes sinnvoll nutzen und für 1 cm eine Kästchenlänge verwenden, z. B.:



Fehler können sowohl bei der rechnerischen als auch bei der zeichnerischen Argumentation auftreten. Häufig zu erwarten sind Rechenfehler, Berechnungen, die auf den Umfang von Rechtecken zielen und Rechnungen, die richtig sind, aber keine vollständigen Begründungen liefern, z. B.:

$20 : 8 = 2 \text{ R } 4$, es war 24 cm hoch. Mit der Rechnung $20 : 6 = 3 \text{ R } 2$ wird die Aussage von Heiner ohne Suche nach einer anderen Legevariante als falsch erklärt.

In den zeichnerischen Varianten sind Zählfehler zu erwarten, z. B. das Beenden der Lösungssuche mit der Variante - Reststreifen 2 cm x 24 cm. Mit dieser Variante wird Heiners Aussage als bestätigt angesehen, wenn nur ein Restrechteck ohne Betrachtung der Maße in die Überlegung einbezogen wurde. Oder die Schülerinnen und Schüler schlussfolgern, dass Heiners Aussage falsch sein muss.

Hinweise zur Weiterarbeit

Die Schülerinnen und Schüler können sich im Unterricht zunächst mit Aufgaben zur Zerlegung bzw. Zusammensetzung von Rechtecken beschäftigen. Im nächsten Schritt sollten sie sich vor allem mit dem Argumentieren und Begründen in verschiedenen Varianten auseinandersetzen. Sie sollten lernen, dass auch die zeichnerische Darstellung eine Möglichkeit bzw. ein Hilfsmittel zum Begründen sein kann. Strategien zur Lösung solcher Probleme können die Schülerinnen und Schüler durch handlungsorientierte Aufgabenbearbeitung erlernen.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst handelnd Aufgaben lösen, z. B. Legplättchen sortieren.

Im Sortiment der Legeplättchen befinden sich quadratische mit einer Seitenlänge von 3 cm und rechteckige mit den Seitenlängen 3 cm und 6 cm.

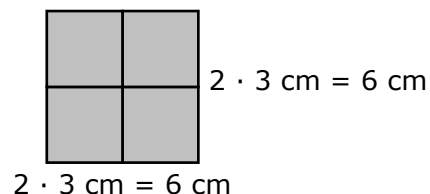
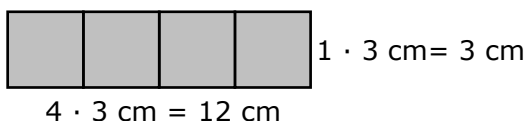


Beispielaufgaben: Legen zusammengesetzter Rechtecke aus Legeplättchen

- Lege aus 2 (3; 4; ... 12) quadratischen (rechteckigen) Legeplättchen ein Rechteck.
- Beschreibe das entstandene Rechteck. Gibt es noch andere Legemöglichkeiten für ein Rechteck mit diesen Legeplättchen?

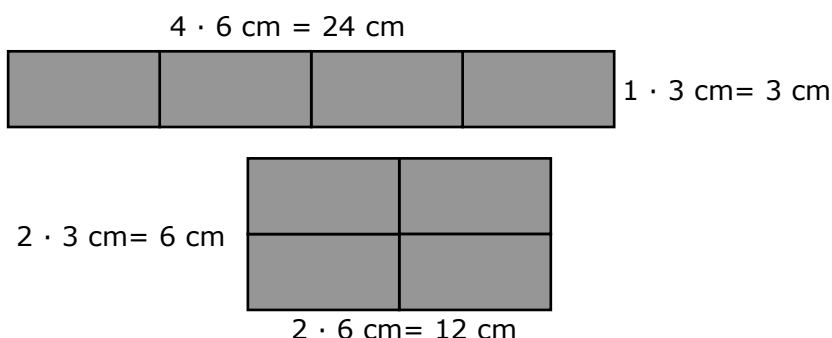
Die Beschreibung ist wörtlich möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollten lernen, eine Beschreibung durch eine zeichnerische Darstellung zu unterstützen, z. B.:

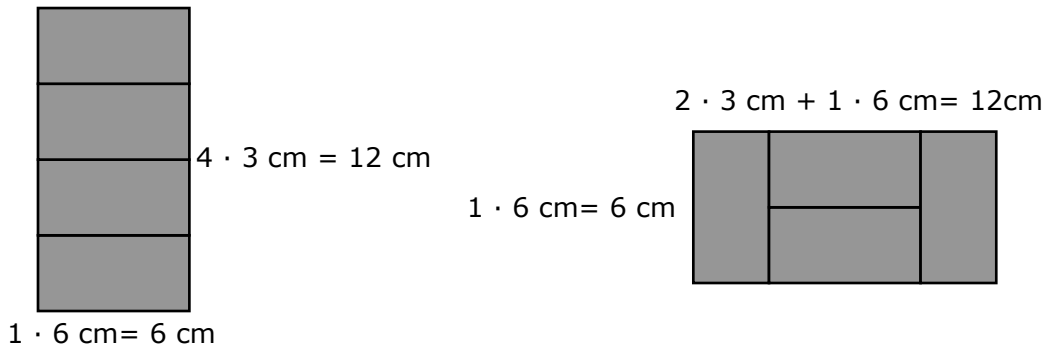
- mit 4 quadratischen Plättchen:



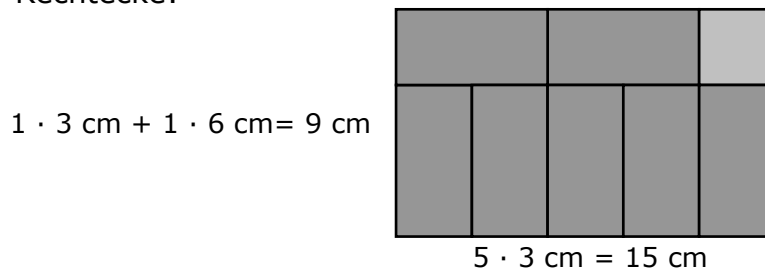
Bei der Verwendung der quadratischen Plättchen werden die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Seitenlängen der zusammengesetzten Rechtecke Vielfache von 3 cm sind. Diesen Erkenntnis ausnutzend könnten die Schüler aufgefordert werden, rechnerisch Seitenlängen von beliebig großen Quadraten (Rechtecken) anzugeben, die man vollständig mit diesen Plättchen auslegen kann.

- mit 4 rechteckigen Plättchen:





- aus quadratischen und rechteckigen Legplättchen zusammengesetzte Rechtecke:



Bei der Verwendung von rechteckigen Plättchen erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die Seitenlängen der zusammengesetzten Rechtecke Vielfache von 3 cm oder 6 cm sind, oder sich aus diesen zusammensetzen.

Für Schülerinnen und Schüler, die diese Erkenntnis gewonnen haben, könnten zur **Differenzierung** Aufgaben ohne Legeplättchen gestellt werden, aber mit der Anforderung die Lösung zeichnerisch darzustellen.

Beispielaufgaben: Zerlegen / Auslegen von vorgegebenen Rechtecken mit quadratischen oder rechteckigen Plättchen

- Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 10 cm und 5 cm (12 cm und 24 cm).
Kannst du es vollständig mit gleichgroßen quadratischen (rechteckigen) Plättchen auslegen? Zeichne deine Lösung auf.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, sind Aufgabenstellungen geeignet, wie:

- Gegeben ist ein Rechteck, das 30 cm lang und 20 cm breit ist.
- Zerlege dieses Rechteck in 7 gleich große Rechtecke.
Ist das ohne Rest möglich? Begründe.
- Gegeben ist ein Rechteck, das 24 cm lang und 20 cm breit ist.
- Zerlege dieses Rechteck in gleich große 8 cm x 6 cm (10 cm x 5 cm) Rechtecke.
Ist das ohne Rest möglich? Begründe.

Aufgabe 11: Schokotraum

Aufgabe

Auf der Verpackung eines Schokoriegels entdeckt Lisa eine Tabelle mit den Nährwertangaben.

Schokotraum	enthält je 100 g	je Riegel (21 g)
Brennwert	2289 kJ / 548 kcal	481 kJ / 117 kcal
Eiweiß	10 g	2,1 g
Kohlenhydrate	52 g	10,9 g
Fett	34 g	7,1 g
Vitamine und Mineralstoffe je 100 g		
Vitamin B ₂	0,55 mg = 34 % (RDA)*	
Vitamin B ₃	1,2 mg = 19 % (RDA)*	
Vitamin B ₁₂	0,88 µg = 88 % (RDA)*	
Calcium	323 mg = 40 % (RDA)*	
Phosphor	280 mg = 35 % (RDA)*	
* Prozentsatz der empfohlenen Tagesmenge		

Wie viel Gramm Fett nimmt Lisa zu sich, wenn sie 2 Schokoriegel nascht?

Lisa nimmt _____ g Fett zu sich.

Lösung

14,2

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen die für die Aufgabe relevante Information aus der Nährwerttabelle (K4, K6). Diese ist den Schülerinnen und Schülern nicht unmittelbar vertraut und beinhaltet einen erheblichen Datenüberschuss (AB II). Sie erkennen, dass ein quantitativer Zusammenhang zwischen der Anzahl der verzehrten Schokoriegel und der Menge der einzelnen aufgenommenen Bestandteile Grundlage der Aufgabe ist. Das nutzend bestimmen sie die aufgenommene Fettmenge (L4).

Fehler werden auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht den richtigen Wert in der Nährwerttabelle finden oder den quantitativen Zusammenhang zwischen der Anzahl der verzehrten Schokoriegel und der Menge der aufgenommenen einzelnen Bestandteile nicht erkennen. Sie gelangen zum falschen Ergebnis „68 g“, wenn sie die Angabe des Fettgehaltes für 100 g verdoppeln.

Zur **Diagnose** der Fehlerursache kann die Lehrkraft einen ggf. notierten Rechenweg der Schülerinnen und Schüler analysieren oder sich ihre Überlegungen erläutern lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst einfache Ableseaufgaben aus Tabellen erhalten, z. B.:

Nährwert und Bestandteile von Fleischsorten (Ausschnitt)

Lebensmittel (je 100 g)	Eiweiß (g)	Kohlenhydrat (g)	Fett (g)	Kochsalz (mg)	Kilokalorien
Brat Poulet	20.60		5.60	83.00	133.00
Ente	18.10		17.20	85.00	227.00
Gans	15.70		31.00	85.00	342.00
Hase	21.60		3.00	50.00	112.00
Hirsch	20.60		3.30	70.00	112.00
Kalbsbrust	18.60		6.30	105.00	130.00
Kalbsherz	15.90	1.00	5.10	120.00	115.00
Kalbshirn	10.10	0.50	7.60	172.00	110.00
Kalbskeule	20.70		1.60	86.00	100.00
Kalbsskotelett	21.10		3.10	93.00	110.00
Kalbsleber	19.20	4.10	4.10	84.00	130.00
Kalbsniere	16.70	0.80	6.40	200.00	125.00
Kalbsschnitzel	20.70		1.80	83.00	100.00
Pute Brust	22.80		0.90	66.00	99.00
Pute Herz	17.30	1.80	5.30	111.00	124.00
Pute Keule	20.60		3.10	95.00	110.00
Rinder Tartar	21.20		3.70	43.00	120.00
Rinderfilet	19.20		4.40	51.00	115.00

Quelle: <http://www.modernbeauty.de/ernaehrung/bestandteile-der-ernaehrung/ernaehrungstabelle-fleisch.html>

- Fragestellungen hierzu könnten lauten:
 - Lies den Anteil an Fett in 100 g Rinderfilet ab.
 - Wie viel Kilokalorien enthält 100 g Gans?
 - ...

Anschließend können leichte Aufgaben zu proportionalen Zuordnungen gelöst werden, z. B.:

- Wie viel Gramm Fett nehme ich zu mir, wenn ich 200 g Kalbsleber esse?
- Welche Fleischsorte hat pro 100 g den höchsten Fettanteil?
- Bei welchem Produkt nehme ich 210 mg Kochsalz zu mir, wenn ich ein 200 g Stück davon esse?
- ...

Weiterhin können einfache Tabellen vervollständigt werden, wie:

- Preise für Äpfel

Anzahl	€
4	3,60
	5,40
13	
	19,80
51	
	58,50

- Preise für Holsteiner Katenrauchschinken

g	€
100	2,70
	5,40
400	
	24,30
1000	
	20,25

- Wechselkurs € in US \$ (Stand 05. Oktober 2011)

€	US \$
0,75	1
	2
4,50	
	9
8,25	
56,25	

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten anspruchsvollere Aufgaben zum Ablesen aus Tabellen und zu Zuordnungen aus ihrer Umwelt angeboten werden, z. B.:

- Preisvergleichstabelle für das *Handy „Fabertasche 0815“*

Produktbezeichnung 	Preis	Lieferzeit	Versand- kosten	Anbieter
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	559,95 €	2 Wochen	2,50 €	Annodunnemals
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	555,30 €	30 Tage	-	SCHNELLZUG
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	527,65 €	14 Tage	1,45 €	Klapperstorch
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	579,90 €	6 Tage	6,90 €	HANDYTECHNIK
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	528,36 €	10 Tage	9,99 €	Habealles
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	527,91 €	1 Woche	-	Telefonisi
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	541,95 €	7 Tage	5,99 €	Mobiler
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	493,13 €	6 Monate	35,00 €	Guten Tag
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	555,30 €	1 Tag	19,99 €	<i>Hallo</i>
<i>Handy „Fabertasche 0815“</i>	559,95 €	1 Monat	-	Heißes Ohr

Aufgabenstellungen zu der Tabelle könnten sein:

- Welcher Anbieter bietet den günstigsten Preis für das Handy an?
- Bei welchen Anbietern gibt es den günstigsten Versandpreis?
- Wo gibt es das günstigste Angebot (Preis plus Versand)?
- Bei welchem Anbieter ist die Lieferzeit am längsten?
- ...

Aufgabenbeispiele zu Zuordnungen:

- Die Tropfen eines gleichmäßig tropfenden Wasserhahns werden in einem Gefäß gesammelt. In einer Stunde sammelt sich im Gefäß eine Füllhöhe von 5 cm. Bei einer Füllhöhe von 20 cm ist 1 Liter Wasser „vertropft“. Wie viel Liter Wasser sind in einem Tag (24 Stunden), in einer Woche, in einem Monat (30 Tage) vergeudet worden?
- Die Werbung verspricht:
Heute günstiges Angebot: 10 kg Waschmittel nur 7,99 €.

Frau Müller geht in das Geschäft, das dieses Angebot hat. Sie findet in demselben Regal 3,5 kg-Pakete mit einem Preis von 2,69 € je Paket. Frau Müller möchte günstig einkaufen. Welches Angebot sollte sie nutzen? Begründe!

2,69 €

Superwaschmittel

3,5 kg

Sonderpreis
7,99 €

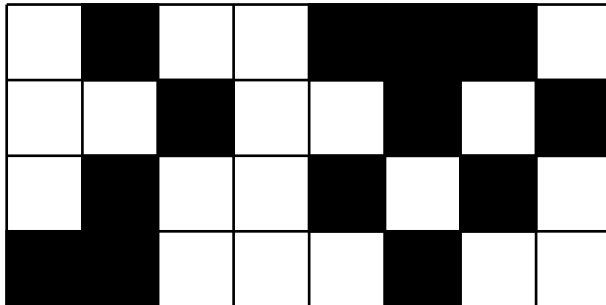
Superwaschmittel

10 kg

Aufgabe 12: Bruchteil

Aufgabe

Welcher Bruchteil der Figur ist dunkel gefärbt?



Lösung

Richtige Angabe des gefärbten Bruchteils: $\frac{13}{32}$

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die **Schülerinnen und Schüler** müssen den in der Abbildung dargestellten Bruchteil erkennen, der durch die gefärbten Einheitsquadrate gekennzeichnet wird. Sie zählen dazu die gefärbten Einheitsquadrate und setzen sie mit der Gesamtanzahl aller Einheitsquadrate in der Figur in Beziehung (K4). Die Schülerinnen und Schüler benötigen die Grundvorstellungen Teil-Ganzes und Bruchteil, sowie die Vorstellung von Möglichkeiten zu ihrer Veranschaulichung bei der Angabe von Anteilen. Die Kenntnis der Bedeutung von Zähler und Nenner bildet dabei eine Voraussetzung (L1, K5). Die verwendete Darstellung ist vertraut, der Bruch muss nicht gekürzt werden (AB I).

Fehler sind hauptsächlich dann zu erwarten, wenn die Grundvorstellungen von Teil-Ganzes und Bruchteil sowie ihrer Verwendung zur Angabe von Anteilen nicht tragfähig genug sind, um die Aufgabenstellung zu erfassen. Werden in der schematischen Darstellung die markierten Einheitsquadrate nicht einzeln erkannt, so können Zählfehler auftreten. Bei der gegebenen einfachen, wohl vertrauten Darstellung, dürften weitere Fehler eher die Ausnahme sein, auch weil der erhaltene Bruch nicht gekürzt werden muss.

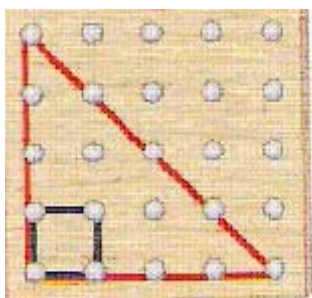
Für eine detaillierte **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihr Vorgehen zu beschreiben.

Hinweise zur Weiterarbeit

Das Visualisieren von Sachverhalten bewirkt die gefestigte Entwicklung des Vorstellungsvermögens der Schülerinnen und Schüler in vielen Bereichen der Mathematik. Schwerpunkt des Unterrichts sollte in diesem Fall die Erarbeitung eines Verständnisses von Brüchen sein, dass von der Vorstellung getragen wird (Teil-Ganzes und Bruchteil).

Aufgaben, in denen Anteile von Kreisen, Rechtecken oder anderen Vielecken abgelesen bzw. in diese eingezeichnet werden müssen, bieten sich an. Dabei ist besonders auf die exakte Verwendung der Sprache zu achten, wie zum Beispiel: „Wie groß ist der gefärbte Anteil an der Gesamtfigur?“ (hier spezifisch an dem **gesamten** Rechteck)

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es sinnvoll, sich noch einmal grundlegend mit Bruchzahlen zur Angabe von Anteilen zu beschäftigen und deren Darstellung durch verschiedene Abbildungen und Zugänge zu festigen. Dabei kann auch der handelnde Umgang durch das Arbeiten am Geobrett hilfreich sein. Schülerinnen und Schüler umspannen im Geobrett vorgegebene Bruchteile der Gesamtfläche oder bestimmen den Anteil der umspannten Fläche zur Gesamtfläche.



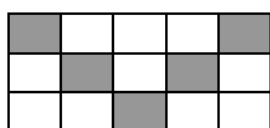
Weiterhin können Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, Abbildungen die entsprechenden Brüche zuzuordnen.

Für Übungen eignen sich drei Klassen von Aufgaben.

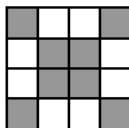
1. Die eingefärbte Figur ist gegeben, der Anteil an der Gesamtfigur ist zu bestimmen.

- Welcher Anteil der Figur ist grau gefärbt?

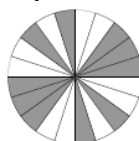
a)



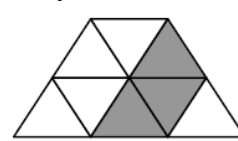
b)



c)

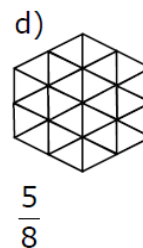
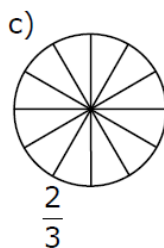
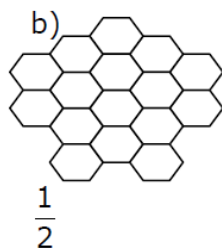
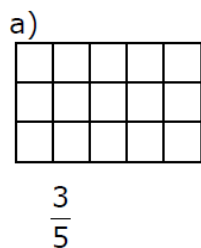


d)



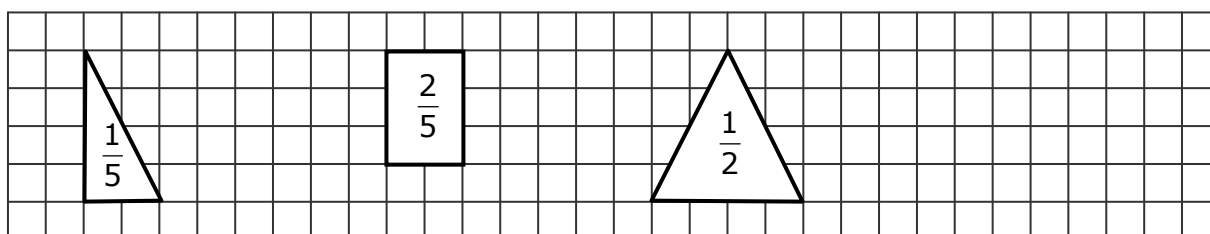
2. Ein Anteil ist für eine Figur gegeben, die Einfärbung ist vorzunehmen.

- Färbe in der Figur den angegebenen Anteil.



3. Nur ein Teil einer Figur mit ihrem Anteil an der Gesamtfigur ist gegeben, die zugehörige Gesamtfigur ist zu bestimmen.

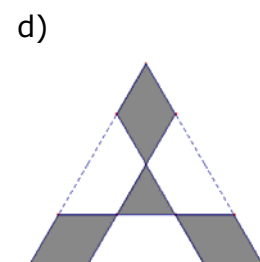
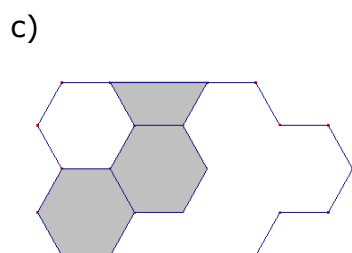
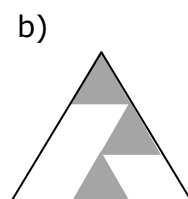
- Der Bruchteil entspricht dem angegebenen Teil der Fläche. Wie könnte dann die Gesamtfigur aussehen? Zeichne mehrere Möglichkeiten.



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können komplexere Figurvorgaben bearbeiten oder selbst erfinden.

Als Festigung der Vorstellung können auch Abbildungen gewählt werden, in denen eine Unterteilung der Figuren in Grundeinheiten noch nicht vorgegeben wird.

- Welcher Anteil der Figur ist grau gefärbt?



Aufgabe 13: Becher

Aufgabe

Peter hat eine $1\frac{1}{2}$ Liter-Flasche Mineralwasser.

Wie viele 0,2-Liter-Becher kann er damit vollständig füllen?

Peter kann damit _____ 0,2-Liter-Becher vollständig füllen.

Lösung

sieben (7)

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler benötigen Sinn tragende Vorstellungen vom Bruchbegriff. Sie müssen in der Lage sein, gemischte Zahlen (gemeine Brüche) in Dezimalbrüche umzuwandeln (oder umgekehrt) bzw. Maßeinheiten des Volumens ineinander umzurechnen, wenn sie mit der nächst kleineren Maßeinheit ml rechnen (L2) ($1\frac{1}{2}$ l = 1,5 l = 1500 ml).

Mit Hilfe der Grundvorstellung von einem Ganzen schließen sie, dass $5 \cdot 0,2$ Liter = 1 Liter oder bei Umwandlung in eine kleinere Maßeinheit dass $5 \cdot 200$ ml = 1000 ml sind. Durch gezieltes Probieren oder durch Bilden der Vielfachen von 0,2 oder der Vielfachen von 200 kommen die Schülerinnen und Schüler zu der Feststellung, dass außer den fünf Bechern noch zwei weitere Becher aus den 1,5 Litern bzw. 1500 ml Mineralwasser vollständig gefüllt werden können und ein Rest von 0,1 Liter übrig bleibt (K3, K5, AB II).

Fehler könnten auftreten, wenn die gemischte Zahl $1\frac{1}{2}$ in einen falschen Dezimalbruch (z. B.: 1,2) oder der Dezimalbruch 0,2 in einen falschen gemeinen Bruch (z. B.: $\frac{1}{2}$) umgewandelt werden. Die Ursache solcher Fehler liegt im Bruchverständnis. Ein weiterer Fehler liegt im falschen Umrechnen der Einheiten, wobei das Umwandeln von 1,5 l in 150 ml und 0,2 l in 20 ml am Ende wieder zum richtigen Ergebnis führt. Das einfache Abarbeiten der Division führt in jedem Fall zum Ergebnis 7,5. Die formale Übernahme der Zahl in den Antwortsatz ergibt ein falsches Ergebnis, denn bei dieser Aufgabenstellung darf nur der ganzzahlige

Teil 7 übernommen werden. Weiterhin können Rechenfehler zum falschen Ergebnis führen.

Zur **Diagnose** der Fehlerursache kann die Lehrkraft den ggf. aufgeschriebenen Rechenweg analysieren oder die Schülerinnen und Schüler können aufgefordert werden, ihre Überlegungen zu formulieren. Dabei werden auch eventuelle Rechenfehler erkennbar.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich Übungen an, die die Vorstellung von Inhaltsangaben schulen. Zu empfehlen sind Aufgaben mit Maßangaben sowohl mit Dezimalbrüchen als auch mit gemeinen Brüchen, z. B.:

- Vergleiche das Volumen von mitgebrachten Getränkeverpackungen (Nachbar / Bankreihe / Klasse).
- Suche Getränkeverpackungen mit 200 ml (1 l; 0,75 l; 500 ml ...) Inhaltsangabe und solche mit gleichem Volumen in einer anderen Schreibweise.
- Es ist üblich, eine Torte in 16 gleich große Stücke zu teilen.
 - Wie viele Stücke enthält eine halbe Torte?
 - Wie viele Stücke enthält eine viertel Torte?
 - Welchen Anteil an der Torte hat ein Stück?
 - Wenn 4 Stücke gegessen wurden, welcher Anteil an der Torte fehlt?

(siehe auch /3/ 2010, Heft B, Aufgabe 1)

Weiterhin sollten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben zum Umwandeln von Dezimalbrüchen in Brüche und umgekehrt bearbeiten, sowie das Umwandeln einer Maßeinheit in die kleinere / größere trainieren, z. B.:

- Wandle die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche um. ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ...)
- Wandle die Dezimalbrüche in gemeine Brüche um. (0,5; 0,2; 0,75; ...)
- Wandle 500 ml in Liter um.
- In einem Kochrezept steht: „Geben Sie 0,5 l Fruchtsaft hinzu. Wie viel Milliliter Fruchtsaft sind hinzuzugeben?“
- ...

Schließlich bieten sich Aufgaben an, bei denen die Berechnung von Anteilen gegebener Größen im Vordergrund steht. Die Anteile sollten zunächst auf die geläufigen Brüche beschränkt werden, z. B.:

- Berechne $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... von einer Tonne.
- Wie oft passt 0,2; 0,25; ... in ein Ganzes / Halbes?
- Wie viele 250 g (0,250 kg) - Päckchen Nudeln sind in einem 5 kg - Karton Nudeln enthalten?

Es ist für einige Schülerinnen und Schüler ebenfalls wichtig, die Division von gemeinen Brüchen durch Dezimalbrüche oder umgekehrt zu wiederholen, wie z. B.: Berechne $\frac{2}{5} : 0,5$ ($1,5 : \frac{1}{5}$).

Eine Festigung des Grundwissens über geläufige Dezimalbrüche könnte auch mit dem im Folgenden aufgeführten Spiel erfolgen.

Spielmaterial:

Karten, die jeweils eine Bruchdarstellung, einen gemeinen Bruch oder einen Dezimalbruch enthalten.

Mögliche Aufgabenstellung:

Lege zu jedem gemeinen Bruch den gleichwertigen Dezimalbruch und die passende Bruchdarstellung.

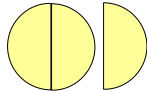
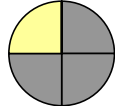
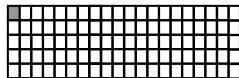
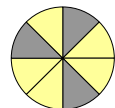
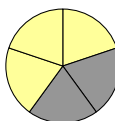
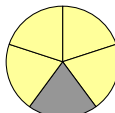
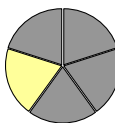
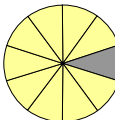
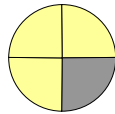
alternativ:

Finde Pärchen, bzw. drei zusammengehörende Karten.

Für Schülerinnen und Schüler die ausreichende Bruchvorstellungen haben, kann die "dritte Spalte" für die jeweilige graphische Darstellung des Bruches entfallen.

Individuell muss sich die Lehrkraft entscheiden, wie die Bruchdarstellungen genutzt werden sollen:

- Eine Figur wird vorgegeben, in welcher die Schülerinnen und Schüler den entsprechenden Bruchteil färben.
- Eine Darstellung wird von den Schülerinnen und Schülern selbst angefertigt.

$\frac{1}{2}$	0,01	
1,5	$\frac{3}{10}$	
$\frac{1}{4}$	0,5	
0,4	$\frac{3}{4}$	
$\frac{1}{5}$	0,1	
0,8	$\frac{1}{8}$	
0,3	$\frac{3}{8}$	
$\frac{4}{5}$	0,125	
0,25	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{100}$	0,75	
0,375	$\frac{2}{5}$	
$\frac{3}{2}$	0,2	

Von **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, können Variationen der Testaufgabe bearbeitet werden. Sie entstehen zum Beispiel durch eine Veränderung des Bruchteils oder der Verwendung verschiedener Einheiten.

- Berechne $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$... von einer Tonne.
- Berechne $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$... von 320 Tonnen.
- Wie oft passt 0,3 Liter; $\frac{1}{3}$ Liter ... in ein Ganzes / Halbes?
- Wie viele 375 ml (0,375 Liter) - Flaschen Öl kann man aus einem 3 Liter - Kanister Öl füllen?

Zur Erhöhung des Schwierigkeitsgrades kann in o. g. Spiel eine Spalte für die bequemen Prozentsätze ergänzt werden.

$\frac{1}{2}$	100 %	0,01
1,5	50 %	$\frac{3}{10}$
$\frac{1}{4}$	75 %	0,5
0,4	25 %	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{5}$	20 %	0,1
0,8	1 %	$\frac{1}{8}$
0,3	10 %	$\frac{3}{8}$
$\frac{4}{5}$	80 %	0,125
0,25	12,5 %	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	150 %	0,75
0,375	30 %	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{2}$	37,5 %	0,2

- Aufgabenstellung: Schneide die Kärtchen aus. Lege jeweils drei zusammengehörende Kärtchen nebeneinander.

Aufgabe 14: Fehlende Ziffern

Aufgabe

In der folgenden Zahl fehlen zwei Ziffern.

4		2	5	
---	--	---	---	--

Ergänze zu einer fünfstelligen Zahl so, dass sie durch 3 und 8 teilbar ist.

Lösung

41256 oder 44256 oder 47256

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe ist es notwendig, die Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 3 bzw. 8 zu kennen und anzuwenden (L1, K5). Es handelt sich um eine für diese Klassenstufe anspruchsvolle Problemstellung. Die Schülerinnen und Schüler müssen erfassen, was es bedeutet, dass bei einer Zahl beide Kriterien erfüllt sind und in einem mehrschrittigen Verfahren eine Strategie zum Finden von Lösungsziffern anwenden (K2, AB III).

Es sollte zuerst die letzte Stelle entsprechend der Endstellenregel für die Teilbarkeit durch 8 mit der Ziffer 6 ergänzt werden. Im Anschluss wird die zweite Ziffer so bestimmt, dass die Quersumme durch 3 teilbar ist. Es ergeben sich so mehrere Lösungen durch die Ziffern 1, 4 und 7.

Natürlich ist es auch möglich die Aufgabe durch zeitaufwendiges systematisches Probieren zu bearbeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, gleich beim ersten Versuch durch Raten eine Lösung zu erhalten, ist sehr klein (3 %).

Um eine **Diagnose** von **Fehlern** zu ermöglichen, sollten die Schülerinnen und Schüler im Unterricht aufgefordert werden, ihre Lösungswege zu erläutern bzw. zu dokumentieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, ist es sinnvoll, die Teilbarkeitsregeln zu wiederholen und anzuwenden.

- Wie lauten die Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 3 und 8 (2 und 5)?
- Notiere drei Zahlen, die durch 8 (3; 2; 5) teilbar sind.
- Kreuze an, welche Zahlen durch 2 und 5 teilbar sind.
 - ☐ 12
 - ☐ 20
 - ☐ 45
 - ☐ 50
 - ☐ 60
 - ☐ 86
 - ☐ 100
- Kreuze an, welche Zahlen durch 3 und 8 teilbar sind.
 - ☐ 12
 - ☐ 24
 - ☐ 45
 - ☐ 56
 - ☐ 60
 - ☐ 96
 - ☐ 300
- Finde Zahlen, die gleichzeitig durch 3 und 8 teilbar sind. Durch welche anderen Zahlen sind die von dir angegebenen Zahlen dann automatisch auch teilbar?

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten**, sind komplexere Aufgaben geeignet, die zusätzlich die Kompetenzen des Argumentierens (K1) oder des Kommunizierens (K6) einbeziehen.

- Systematisiere die Teilbarkeitsregeln. Für welche Zahlen gibt es Endstellenregeln und für welche Quersummenregeln?
- Unter welchen Bedingungen ist eine Zahl gleichzeitig durch 2 und 3 teilbar? Für welche Zahl gilt diese Regel dann auch?
- Unter welcher Bedingung kann aus der Teilbarkeit durch zwei verschiedene Zahlen auf die Teilbarkeit durch eine dritte Zahl geschlossen werden?
- Wie kann die Teilbarkeitsregel für die Zahl 20 (15; 12; 7) lauten?
- Kannst du für alle Zahlen Teilbarkeitsregeln formulieren? Begründe.
- Teilbarkeitsregeln finden oft beim Rechnen mit Brüchen Anwendung. Finde dafür Beispiele.

Aufgabe 15: Größtes Ergebnis

Aufgabe

Bei welcher Aufgabe ist das Ergebnis am größten?
Kreuze an.

- ☐ $5 + 0 + 2 + 0$
- ☐ $502 + 0$
- ☐ $50 \cdot 20$
- ☐ $50 + 20$
- ☐ $5 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0$

Lösung

- ☐ $5 + 0 + 2 + 0$
- ☐ $502 + 0$
- ☒ $50 \cdot 20$
- ☐ $50 + 20$
- ☐ $5 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0$

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Um das größte Ergebnis zu finden benötigen die Schülerinnen und Schüler Fähigkeiten im Vergleichen, Addieren und Multiplizieren von natürlichen Zahlen, insbesondere bei Termen mit Null (L1). Sie können alle Rechnungen ausführen, die Ergebnisse vergleichen und kommen durch mehrschrittiges Arbeiten zum Ankreuzen der Auswahlantwort „ $50 \cdot 20$ “ (K5, AB II).

Alternativ können die Schülerinnen und Schüler auch unter Verwendung des Ausschlussverfahrens zur Lösung gelangen, z. B.:

- Die erste und die letzte Aufgabe können ausgeschlossen werden:
Bei $5 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0$ ist ein Faktor 0 und damit das Produkt gleich Null,
bei $5 + 0 + 2 + 0$ verändert die Addition der Zahl 0 die Summe 7 nicht,
alle anderen Aufgaben haben größere Summanden oder Faktoren.
- Die Summe $50 + 20$ ist kleiner als die Summe $502 + 0$.
- $502 + 0$ ist kleiner als $50 \cdot 20$, denn schon $50 \cdot 10 = 500$ ist annähernd so groß, wie das Ergebnis der Addition.
- Somit ist bei der Aufgabe $50 \cdot 20$ das Ergebnis am größten.

Ein häufig zu erwartender **Fehler** ist das Ankreuzen von $502 + 0$. Mögliche Ursache dafür kann sein, dass diese Schülerinnen und Schüler nur die Größe der

gegebenen Summanden bzw. Faktoren in ihre Entscheidung einbezogen haben, oder $50 \cdot 20$ mit 100 oder 500 falsch berechnet haben.

Hinweise zur Weiterarbeit

Im Unterricht sollten die Schülerinnen und Schüler vielfältige Gelegenheiten erhalten, ihre Rechenfähigkeiten und Kenntnisse über Rechenoperationen und ihre Eigenschaften anzuwenden.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sind z. B. folgende Übungen geeignet:

- Berechne die folgenden Aufgaben. Ordne die Ergebnisse nach der Größe.
 $9 + 0 + 5 + 0$ $905 + 0$ $90 \cdot 50$ $90 + 50$ $9 \cdot 0 \cdot 5 \cdot 0$
- Begründe ohne auszurechnen.
Das Ergebnis von $905 \cdot 0$ ist kleiner als das Ergebnis von $90 \cdot 50$.
Das Ergebnis von $905 + 0$ ist größer als das Ergebnis von $905 \cdot 0$.
Das Ergebnis von $905 \cdot 1$ ist kleiner als das Ergebnis von $905 + 1$.
- Berechne.
 $50 \cdot 20$; $500 \cdot 20$; $500 \cdot 200$; ...
 $50 + 20$; $500 + 20$; $500 + 200$; ...
 $50 - 20$; $500 - 20$; $500 - 200$; ...
 $20 : 5$; $200 : 5$; $200 : 50$; ...
- Kreuze das größte Produkt an. Begründe deine Entscheidung.
☐ $1998 \cdot 1999$
☐ $1999 \cdot 2008$
☐ $2008 \cdot 1997$
☐ $2010 \cdot 2020$
☐ $2001 \cdot 2020$

Es können auch Aufgabenkarten hergestellt werden, aus denen die Schülerinnen und Schüler eine vorgegebene Anzahl ziehen oder zugeordnet bekommen und dann vergleichen, ordnen, das größte oder kleinste Ergebnis suchen.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, sind Aufgaben geeignet, bei denen zusätzlich Punktrechnung vor Strichrechnung zu beachten ist, wie:

- Berechne die folgenden Aufgaben. Ordne die Ergebnisse nach der Größe.
 $2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 9$ $2 + 0 + 0 + 9$ $2 \cdot 0 \cdot 0 + 9$
 $2 + 0 - 0 \cdot 9$ $2 - 0 - 0 \cdot 9$ $2 - 0 + 0 : 9$
- Kreuze das richtige Ergebnis an. Erläutere deine Überlegungen.
 $2010 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 = ?$
☐ 4020
☐ 2013
☐ 2012
☐ 2010
☐ 0

Die Verwendung des Relationszeichens beim Vergleichen, das Einbeziehen der Bruchrechnung und des Potenzierens in die Entscheidungen erhöhen den Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellungen, z. B.:

- Vergleiche und setze passend = oder < oder > ein.

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \text{---} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} : \frac{1}{2} & \text{---} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 10^2 & \text{---} & 2 \cdot 10 \end{array}$$

Durch die Auseinandersetzung mit vorgegebenen Aussagen können Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über Eigenschaften der Rechenoperationen anwenden und das mathematische Argumentieren üben, z. B.:

- Ist die folgende Aussage wahr? Begründe deine Entscheidung.
(Achte auf die besondere Rolle der Null bzw. der Eins.)
 - „Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist immer größer als jeder einzelne Summand.“
 - „Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist immer kleiner als das Produkt dieser Zahlen.“
 - „Das Produkt zweier gebrochener Zahlen ist immer größer als jeder einzelne Faktor.“

Aufgabe 16: Regenmesser

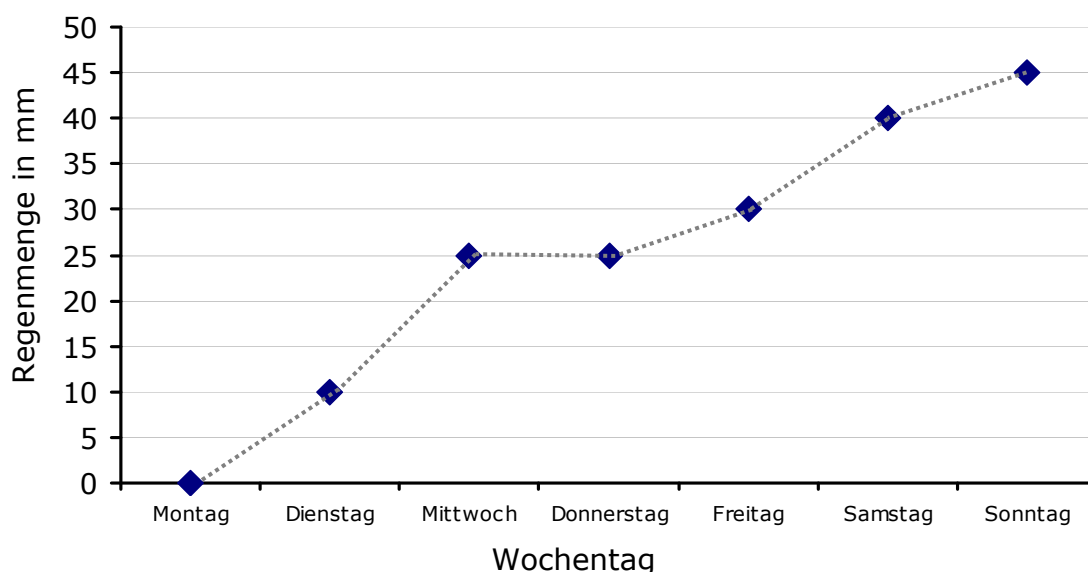
Aufgabe

Svea hat einen Regenmesser geschenkt bekommen.
Der Regenmesser ist ein Gerät, in dem Regenwasser gesammelt wird.

Svea stellt den Regenmesser am Montag auf und liest jeden Abend zur gleichen Zeit ab, wie viel Regen sich in ihrem Regenmesser gesammelt hat. Zwischendurch leert Svea den Regenmesser nicht. Es kommt also immer nur Wasser hinzu.



Die Grafik zeigt Sveas Ergebnisse.



- a) Zwischen welchen Messungen hat es keinen Regen gegeben?
Vervollständige den Satz:

Zwischen den Messungen am _____ und am _____ hat es keinen Regen gegeben.

- b) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Kreuze an.

Von Montag bis Dienstag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Dienstag bis Mittwoch sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Mittwoch bis Donnerstag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Donnerstag bis Freitag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Freitag bis Samstag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Samstag bis Sonntag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch

Lösungen

Aufgabe a)

Beide Wochentage wurden richtig ergänzt:

Zwischen den Messungen am **Mittwoch** und am **Donnerstag** hat es keinen Regen gegeben.

Aufgabe b)

Von Montag bis Dienstag ...	☒ wahr	☐ falsch
Von Dienstag bis Mittwoch ...	☐ wahr	☒ falsch
Von Mittwoch bis Donnerstag ...	☐ wahr	☒ falsch
Von Donnerstag bis Freitag ...	☐ wahr	☒ falsch
Von Freitag bis Samstag ...	☒ wahr	☐ falsch
Von Samstag bis Sonntag ...	☐ wahr	☒ falsch

... sind (ungefähr) 10mm Regen gefallen.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei dieser Aufgabe geht es in erster Linie darum, einem Diagramm Messdaten zu entnehmen (L5, K4) und den entsprechenden mathemathikhaltigen Text Sinn entnehmend zu erfassen (K6), wobei die Textaussagen in Beziehungen zwischen den Messdaten zu übersetzen sind (K3). Wesentlich ist dabei u. a. die Erkenntnis, dass die Regenmenge eines Tagesintervalls nicht durch einen einzelnen Messwert, sondern durch die Differenz aufeinander folgender Messwerte repräsentiert wird. Die Lösungswege sind mehrschrittig (AB II).

Um den Lese- und Lösungsaufwand begrenzt zu halten, ist die Realsituation in der Aufgabe vereinfacht beschrieben worden, indem darauf verzichtet wurde, genauere Hinweise auf technische Details oder auf die Vernachlässigbarkeit der Verdunstung zu geben, und indem die Ablesewerte auf 5 mm - Abstufungen reduziert wurden.

In Teil **a)** gilt es zunächst zu erkennen, dass die im Text genannte Bedingung, dass es keinen Regen gegeben habe, ein Gleichbleiben des Messwerts von einem Tag auf den nächsten bedeutet. Sodann ist im Graphen abzulesen, von welchem Tag auf den nächsten die Messwerte auf gleicher Höhe bleiben bzw. die gestrichelte Verbindungslinie waagerecht verläuft.

Mögliche **Fehler** können hier auftreten, wenn die Umsetzung der Bedingung in eine Beziehung zwischen aufeinander folgende Messwerte nicht gelingt und die Antwort falsch geraten oder ausgelassen wird. Eine **Diagnose**, auf welche Ursachen falsche Antworten zurückzuführen seien, kann jedoch in der Regel erst auf Grund von nachträglichen Gesprächen gestellt werden.

In Teil **b)** gilt es zuerst zu erkennen, dass der Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Messwerten 10 mm betragen muss. Diese Erkenntnis kann zweckmäßig in die Bedingung übersetzt werden, dass zwei aufeinander folgende Messpunkte um zwei Hilfslinienabstände nach oben springen müssen. Alternativ hierzu können natürlich auch abgelesene Zahlenwerte verglichen werden.

Als **Fehler** sind unvollständige oder falsche Ankreuzungen zu erwarten. Ursachen hierfür können Übertragungsfehler sein, indem zwar richtig erkannt wird, ob der Abstand der Messwerte 10 mm beträgt oder nicht, aber im Antwortfeld in einer falschen Zeile angekreuzt wird. Eine **Diagnose** von Fehlerursachen wird aber in der Regel aus den Ankreuzungen allein nicht möglich sein, sondern erst aus Erfahrungen mit Übungsaufgaben im nachfolgenden Unterricht hervorgehen können.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht oder nur teilweise lösen konnten**, bieten sich zunächst Aufgaben an, die sich auf Teilaspekte beschränken:

- Übersetzungen zwischen Textaussagen und Messwerten,
- Übersetzungen zwischen Messwerten und ihrer grafischen Darstellung,
- direkte Übersetzungen zwischen Textaussagen und grafischen Darstellungen,
- Interpretation der Messdaten.

An Hand der dargestellten Regenmessungen könnten z. B. folgende Aufgaben gestellt werden:

- An welchem Tag hat Svea den Messwert 30 mm abgelesen?
- Am Donnerstag betrug der Messwert 25 mm, zwei Tage später war der Messwert um 15 mm gestiegen. Welcher Messwert an welchem Tag ergibt sich aus dieser Information?
- Lies aus der Grafik den höchsten Messwert ab.
- Zwischen welchen Tagen hat es am meisten geregnet? Begründe.

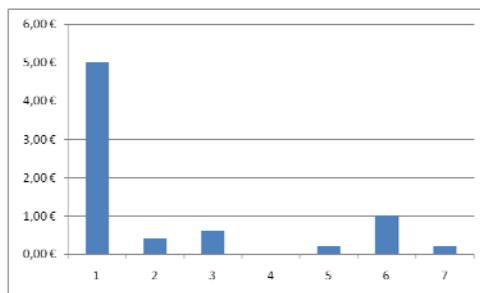
Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, können zur Steigerung der Kompetenz im Kommunizieren auch Fragestellungen über Aussagequalitäten von Darstellungen thematisiert werden:

- Nico hat eine Spardose geschenkt bekommen. An jedem Abend notiert Nico, wie viel Geld er in die Spardose steckt, und wie viel Geld in ihr enthalten sein müsste.

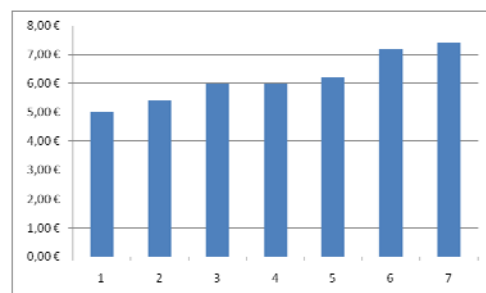
Tag Nr.	Hineingesteckt	Enthalten
1	5,00 €	5,00 €
2	0,40 €	5,40 €
3	0,60 €	6,00 €
4	nichts	6,00 €
5	0,20 €	
6	1,00 €	
7	0,20 €	

- a) Am 5. Tag hatte Nico seine Eintragungen in der letzten Spalte unterbrochen. Vervollständige die Tabelle.
- b) An welchen Tagen hat Nico weniger als 60 ct in die Spardose hineingesteckt?
- c) Nico möchte eine Kontrollrechnung durchführen. Er addiert alle Geldbeträge, die er in der zweiten Spalte eingetragen hat.
 - c1) Wie kann er die berechnete Summe zur Kontrolle seines Sparergebnisses verwenden?
 - c2) Entscheide, ob auch die Summe der Beträge in der vervollständigten 3. Spalte zur Kontrolle genutzt werden könnten, und begründe deine Entscheidung.
- d) Nico versucht, durch Diagramme sein Sparverhalten zu veranschaulichen. Er erstellt die folgenden Grafiken.

Einzahlungen



Inhalt



Welches Diagramm stellt welche Information besonders heraus?
Begründe.

Aufgabe 17: Zoobesuch

Aufgabe

An ihrem 12. Geburtstag möchte Sarah zusammen mit ihren Eltern und Geschwistern den Zoo besuchen.
Sarah hat eine 9-jährige Schwester und einen 21-jährigen Bruder, der studiert.
Wie viel muss die Familie für den Eintritt bezahlen, wenn sie die günstigste Variante für den Eintrittspreis wählt?

Eintrittspreise für Tageskarten

Erwachsene	13,00 €
Ermäßigungsberechtigte (Schüler, Berufsschüler, Studenten, Zivil- und Wehrdienstleistende)	11,00 €
Kinder von 4 - 14 Jahren	9,00 €
Eltern-Kind-Karte (ein oder beide Elternteile und ihre Kinder bis 14 Jahre)	34,00 €

Die Familie muss _____ € für den Eintritt bezahlen, wenn sie die günstigste Variante wählt.

Lösung

45 (bzw. 45,00)

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen Informationen aus der Preistabelle, interpretieren diese und führen mit Größen einfache Berechnungen durch (L2, K5, K6). Dabei ist es erforderlich, die Situation in mathematische Sprache zu übersetzen (K3). Durch Erkennen beider Möglichkeiten, der Preisberechnung und des Vergleichens (K2), finden sie heraus, dass sich der günstigste Gesamtpreis (45,00 €) aus einer Eltern-Kind-Karte für die Eltern, Sarah und Sarahs Schwester (34,00 €) und einer Karte für Ermäßigungsberechtigte für den Bruder (11,00 €) zusammensetzt. Die Preistabelle ist den Schülerinnen und Schülern nicht unmittelbar vertraut und die relevanten Informationen müssen aus den verschiedenen Angaben zusammengesucht werden (AB II).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage sind, die Informationen der Preistabelle sachgerecht aufzunehmen. Einen falschen Gesamtpreis in Höhe von 55,00 € ermitteln sie, indem sie die Einzelpreise für die fünf Personen zusammenrechnen (zwei Erwachsene, zwei Kinder, ein Ermäßigungsberechtigter). Möglich wäre auch eine Preisannahme von 9,00 € für den studierenden Bruder, so dass ein Gesamtpreis von 53,00 € entsteht. Weiterhin könnte auch die Familienkarte als ausreichend angenommen werden, weil der studierende Bruder mit in die Kinderzahl der Familie gezählt wird, so dass ein Gesamtpreis von 34,00 € entsteht.

Zur **Diagnose** der Fehlleistung sollten die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen beim Lösen der Aufgabe erläutern oder zusammen mit dem Lehrer den Lösungsweg nachvollziehen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten sollten zunächst Aufgaben erhalten, bei denen aus Tabellen Informationen entnommen werden müssen. Dazu eignen sich z. B. Fahrpläne wie der folgende:

404

Meißen - Cossebaude

Verkehrsgesellschaft Meißen mbH

Tarifzonen: Meißen / Nossen

Linie verkehrt am 24. und 31.12. wie samstags!

Verkehrstage		Montag - Freitag														
Fahrtnummer		ab	ab	ab	ab	S	F	ab	ab	ab	ab	ab	ab	ab	ab	
Verkehrshinweise																
Meißen, Busbahnhof / 8		ab	4:35	5:25	6:20	7:30	9:05	9:05	11:45	13:10	13:10	14:00	14:00	15:00	16:52	18:25
--- Bahnhofstraße			4:37	5:27	6:22	7:32	9:07	9:07	11:47	13:12	13:12	14:02	14:02	15:02	16:54	18:27
--- Altstadtbrücke			4:38	5:28	6:23	7:33	9:08	9:08	11:48	13:13	13:13	14:03	14:03	15:03	16:55	18:28
--- Talbad										13:14		14:04				
--- Neumarkt										13:15		14:05				
--- Schiffsgaststätte			4:40	5:30	6:25	7:35	9:10	9:10	11:50	13:17	13:15	14:07	14:05	15:05	16:57	18:30
Batzdorf, Rehbockschänke			4:42	5:32	6:27	7:37	9:12	9:12	11:52	13:19	13:17	14:09	14:07	15:07	16:59	18:32
Scharfenberg, Schachtberg			4:45	5:35	6:30	7:40	9:15	9:15	11:55	13:22	13:20	14:12	14:10	15:10	17:02	18:35
--- Heimatmuseum					6:32			9:17	11:57			14:14	14:12	15:12		
--- Wendepplatz					6:33			9:18	11:58			14:15	14:13	15:13		
--- Arztpraxis					6:34			9:19	11:59			14:16	14:14	15:14		
Naustadt, Dorfmitte					6:35			9:20	12:00			14:17	14:15	15:15		
--- Neuer Anbau					6:37			9:22	12:02			14:19	14:17	15:17		
Pegenau, Eichberg					6:39			9:24	12:04			14:21	14:19	15:19		
Gauernitz, Gasthaus			4:48	5:38	6:42	7:43	9:18	9:27	12:07	13:25	13:23	14:24	14:22	15:22	17:05	18:38
--- Verkaufsstelle			4:49	5:39	6:43	7:44	9:19	9:28	12:08	13:26	13:24	14:25	14:23	15:23	17:06	18:39
Wildberg			4:51	5:41	6:45	7:46	9:21	9:30	12:10	13:28	13:26	14:27	14:25	15:25	17:08	18:41
Wildberg, Siedlung			4:52	5:42	6:46	7:47	9:22	9:31	12:11	13:29	13:27	14:28	14:26	15:26	17:09	18:42
Niederwartha, Haltepunkt			4:54	5:44	6:48	7:49	9:24	9:33	12:13	13:31	13:29	14:30	14:28	15:28	17:11	18:44
Linie 94 nach Dresden				5:54			9:44	9:44	12:24	13:44	13:44	14:44	14:44	15:39	17:24	
--- Oberwarthaer Straße			4:56	5:46	6:50	7:51	9:26	9:35	12:15	13:33	13:31	14:32	14:30	15:30	17:13	18:46
--- Hermann-Große-Straße			4:57	5:47	6:51	7:52	9:27	9:36	12:16	13:34	13:32	14:33	14:31	15:31	17:14	18:47
--- Amselgrund			4:58	5:48	6:52	7:53	9:28	9:37	12:17	13:35	13:33	14:34	14:32	15:32	17:15	18:48
Cossebaude, Winkelwiesen			4:59	5:49	6:53	7:54	9:29	9:38	12:18	13:36	13:34	14:35	14:33	15:33	17:16	18:49
--- E.-Berger-Straße			5:00	5:50	6:54	7:55	9:30	9:39	12:19	13:37	13:35	14:36	14:34	15:34	17:17	18:50
Linie 94 nach Dresden			5:05		6:56	8:08	10:08	10:08								19:08
--- Bahnhof		an	5:01	5:51	6:55	7:56	9:31	9:40	12:20	13:38	13:36	14:37	14:35	15:35	17:18	18:51
Verkehrshinweise																
Erklärungen																
S : verkehrt nur an Schultagen																
So : verkehrt nur Sonntag																
F : verkehrt nur in																
ALB : ALB muß unter																

Zunächst könnte man eine Analyse der Tabelle vornehmen, damit die Schüler systematisch an das Lesen von Tabellen herangeführt werden, z. B.:

- Worüber gibt die Tabelle Auskunft?
- Welche Informationen sind in der ersten Spalte zu finden?
- Welche Informationen enthalten die weiteren Spalten?
- ...

Danach können verschiedene Ableseaufgaben gegeben werden, z. B.:

- Wann fährt der früheste Bus vom Bahnhof Meißen ab?
- Wann fährt der späteste Bus vom Bahnhof Meißen ab?
- Wie lange fährt der Bus, der um 11:45 Uhr vom Bahnhof Meißen abfährt, bis nach Naustadt, Dorfmitte?
- ...

Es eignen sich auch Tabellen, aus denen Daten entnommen werden, die vergangene und zukünftige Situationen beschreiben. So aus der folgenden Tabelle zur Entwicklung der Weltbevölkerung:

Spiegel online Wissenschaft, 10.07.2009

Weltbevölkerung (in Millionen)							
	1950	1975	2000	2005	2010	2025	2050
Europa	547	676	727	729	733	729	691
Afrika	227	419	819	921	1033	1400	1998
Asien	1403	2379	3698	3937	4167	4773	5231
Australien	13	21	31	34	36	43	51
Lateinamerika	167	323	521	557	589	670	729
Nordamerika	172	242	319	335	352	398	448
Welt	2529	4061	6115	6512	6909	8012	9150
Quelle: Uno-World Population Prospects (2008 Revision), Statistisches Bundesamt							

- Wie viele Menschen lebten im Jahr 1950 in Europa?
- Wie viele Menschen werden voraussichtlich im Jahr 2050 in Australien leben?
- Wie viele Menschen werden voraussichtlich im Jahr 2025 in Lateinamerika und Nordamerika insgesamt leben?
- Wie viele Menschen werden voraussichtlich im Jahr 2050 auf der Welt insgesamt leben?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können komplexere Aufgaben bearbeiten, z. B. die folgenden:

- An der Kasse einer Schwimmhalle findet man die folgende Preistabelle:

Karte 1 Person	5 €
Kleingruppenkarte 8 Personen	38 €
Gruppenkarte 20 Personen	90 €

- Welchen Preis hat eine Gruppe von 4 Personen zu zahlen?
- Wie viele Karten bekommt man für 30 €?
- Für 30 Personen rechnet Frank einen Preis von 140 € aus. Maike meint, dass die Gruppe noch günstiger hineinkommen kann. Hat Maike recht? Begründe.
- Die Schwimmhallengesellschaft will eine Jahreskarte für 1 Person einführen. Was wäre ein angemessener Preis?

- Die folgende Tabelle stellt die Taxitarife für Dresden dar:

Grundpreis*	Tarifstufe 2 (5:00 Uhr bis 20:00 Uhr)		Tarifstufe 3 (20:00 Uhr bis 5:00 Uhr)	
	Kilometerpreis bis 3 Kilometer Fahrstrecke	Kilometerpreis ab dem 4. Kilometer Fahrstrecke	Kilometerpreis bis 3 Kilometer Fahrstrecke	Kilometerpreis ab dem 4. Kilometer Fahrstrecke
2,50 €	1,70 €	1,40 €	1,70 €	1,60 €

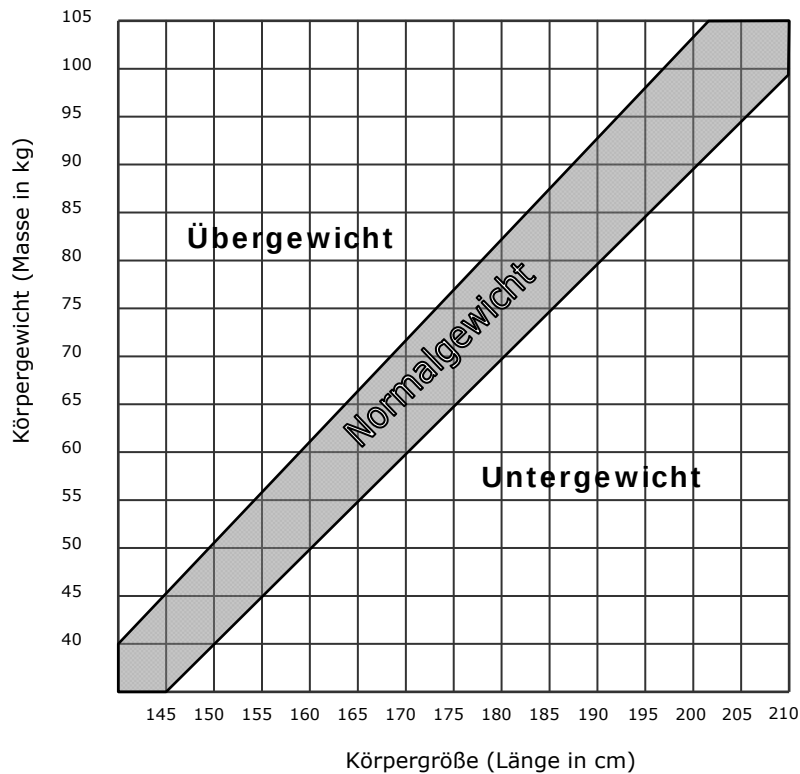
*Der Grundpreis ist immer zu bezahlen, er ist schon auf dem Taxameter angezeigt, wenn die Fahrt beginnt.

- Welchen Endpreis muss ein Fahrgast zahlen, der um 17:00 Uhr mit dem Taxi eine Strecke von 6 Kilometern fährt?
- Wie viel kostet eine Heimfahrt von der Semperoper um 23:00 Uhr, wenn eine Strecke von 12 Kilometern zu fahren ist?
- Ein Fahrgast bezahlt um 12:00 Uhr mittags einen Preis von 7,60 €. Wie viel Kilometer hat der Taxifahrer ihn gefahren?
- ...

Aufgabe 18: Körpergewicht

Aufgabe

Mit dem folgenden Diagramm kann man näherungsweise ermitteln, ob man Normalgewicht hat oder nicht.



Wie schwer sollte nach diesen Angaben ein 1,55 m großer Schüler mindestens sein, um Normalgewicht zu haben?

Ein 1,55 m großer Schüler sollte mindestens _____ kg wiegen.

Lösung

45

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4) Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen aus der graphischen Darstellung Informationen und werten diese aus (L5, K4). Sie erkennen in dem abgebildeten Zusammenhang zwischen der Körpergröße (Länge in cm) und dem

Körpergewicht (Masse in kg) den mit Normalgewicht gekennzeichneten Bereich (L4). Die Schülerinnen und Schüler geben dann für diesen Bereich und für eine bestimmte Körpergröße den minimalen Wert des entsprechenden Körpergewichtes an, indem sie „mindestens“ richtig interpretiert haben (AB II).

Ein häufiger **Fehler** wird sein, dass die Forderung nach dem minimalen Wert für den Bereich des Normalgewichts bei einer bestimmten Größe nicht beachtet wird. Die Schülerinnen und Schüler geben dann Werte wie z. B. 50 kg oder den maximalen Wert von etwa 56 kg an.

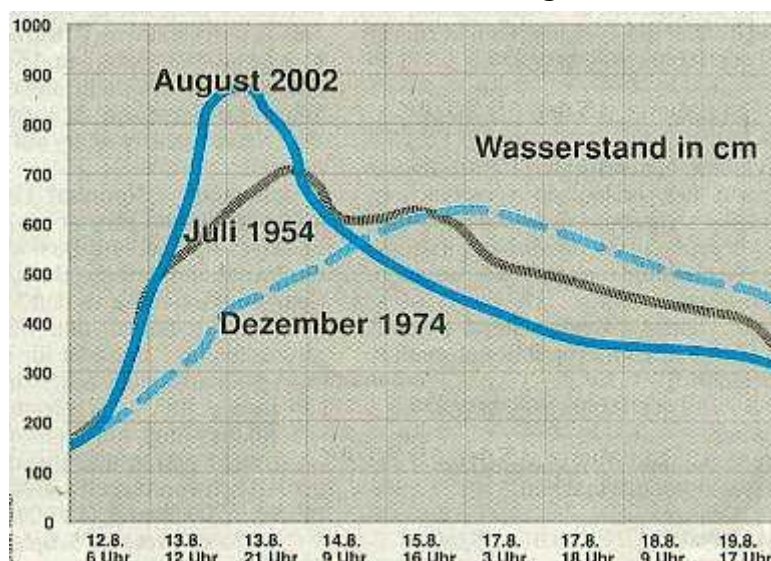
Um eine detaillierte **Diagnose** von Fehlern zu ermöglichen, sollte im Unterricht Wert darauf gelegt werden, dass die Vorgehensweise beim Entnehmen von Informationen aus der gegebenen graphischen Darstellung verbalisiert wird.

Hinweise zur Weiterarbeit

Das Entnehmen von Informationen aus Grafiken ist für das Lösen von Sachproblemen oft von Bedeutung und somit eine Basiskompetenz für die Schülerinnen und Schüler, die fachübergreifend aufgebaut werden sollte. Zur **Differenzierung** bietet sich der Einsatz von weiteren graphischen Darstellungen aus dem Alltag an, die sich in Komplexität und Lesbarkeit unterscheiden können.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten aus graphischen Darstellungen verschiedene Werte ablesen und mit diesen operieren, wie:

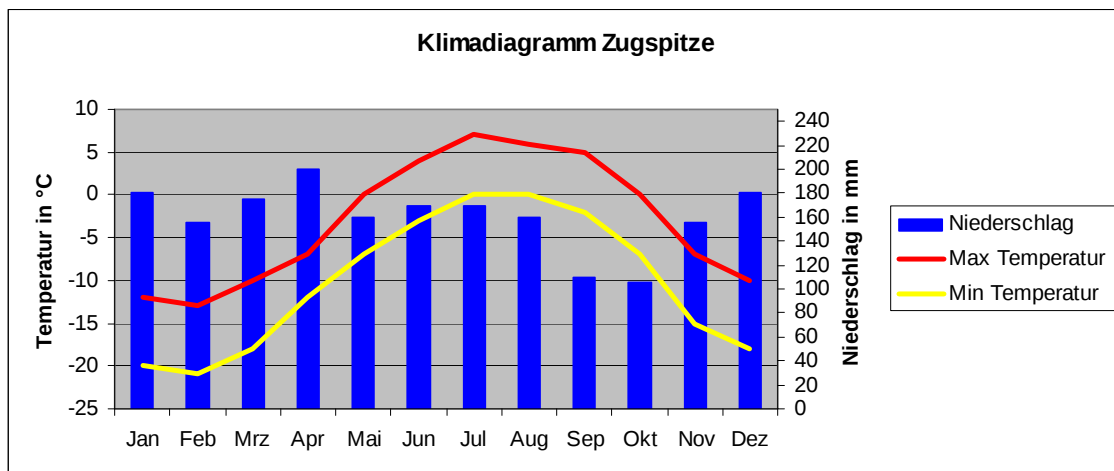
Die Wasserstände der Mulde am Pegel Golzern



Quelle: <http://www.gbrinkmann-bennewitz.privat.t-online.de/>

- Bestimme für das Hochwasser vom Juli 1954 den höchsten Wasserstand.
- Lies den niedrigsten im Diagramm erfassten Wasserstand der Mulde ab.
- Ermittle die Differenz der höchsten Wasserstände vom Dezember 1974 und vom Juli 1954.
- Bestimme aus dem Diagramm den Zeitabschnitt, in dem beim Hochwasser vom August 2002 der Wasserstand am schnellsten anstieg.
- Formuliere selbst Fragen, die du mit Hilfe des Diagramms beantworten kannst.

Für Übungen mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, bieten sich komplexere Grafiken an, in denen mehrere Größen dargestellt sind. Ein Beispiel dafür sind Klimadiagramme.



- In welchem Monat war die durchschnittliche Niederschlagsmenge am größten (am geringsten)?
- Ermittle, in welchem Monat die geringste Temperatur auftrat.
- Ermittle die Differenz der durchschnittlichen Niederschlagsmengen zwischen dem Monat mit der höchsten Niederschlagsmenge und dem Monat mit der geringsten Menge.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Niederschlagsmenge und Temperatur?
- ...

Aufgabe 19: Schnittpunkte

Aufgabe

Wie viele verschiedene Schnittpunkte können ein Kreis und ein Dreieck **höchstens** miteinander haben?
Fertige zur Lösung eine Skizze an.

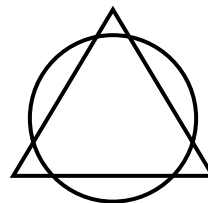
Ein Kreis und ein Dreieck können höchstens _____ verschiedene Schnittpunkte miteinander haben.

Lösung

Richtige Skizze: z. B.:

und

Angabe der richtigen Anzahl: 6



Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen mögliche Lagebeziehungen von Kreis und Dreieck (L3). Die Lösung dieses Problems erfordert die Auswahl einer geeigneten Strategie (z. B. Probieren) (K2), bei der sie (gegebenenfalls mehrfach) systematisch modifizierte Skizzen anfertigen (K4). Die Frage nach der maximalen Anzahl verschiedener Schnittpunkte macht eine anschließende Reflektion des Vorgehens notwendig (AB III).

Der häufigste **Fehler** besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler nicht die maximale Anzahl möglicher Schnittpunkte betrachten (Bedeutung von „höchstens“ nicht beachten). Fehlerhafte Skizzen mit ungünstigen Lage- und Größenverhältnissen führen häufig auch zu falschen Ergebnisangaben. Diese erlauben der Lehrkraft nach dem Test recht gut, eine **Diagnose** der Fehlerursachen vorzunehmen und auf systematisches Vorgehen zu verweisen. Zusätzlich sollten Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht gelöst haben**, kann es im Unterricht hilfreich sein, die zur Lösung erforderlichen Kompetenzen einzeln zu betrachten.

Um die Bedeutung des Begriffes „höchstens“ zu verdeutlichen, bieten sich auch nicht geometrische Sachverhalte an:

- Hans bekommt höchstens 15 € Taschengeld für einen Wandertag.
Wie viel Geld kann das sein?
- Familie Weber fährt höchstens 14 Tage im Jahr in den Urlaub.
Wie viele Tage können das sein?

Eine Steigerung der Anforderungen entsteht, wenn man die obere Grenze nicht vorgibt, sondern sie von den Schülerinnen und Schülern zunächst bestimmen lässt:

- Es werden zwei Würfel einmal geworfen.
Welche Augensumme ist bei diesem Wurf höchstens möglich?

Danach können die Lagebeziehungen von einem Kreis zu einer Geraden in der Ebene Gegenstand sein:

- Zeichne zu einem vorgegebenen Kreis jeweils eine Gerade so, dass
 - kein Schnittpunkt entsteht,
 - ein Berührungspunkt entsteht oder
 - zwei Schnittpunkte entstehen.

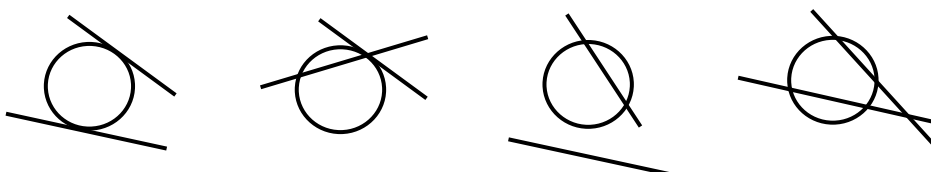
Nach der Betrachtung dieser Fälle wird eine zweite Gerade hinzugenommen und weiter ausdifferenziert:

- Zeichne zu einem vorgegebenen Kreis jeweils zwei Geraden so, dass der Kreis mit den beiden Geraden:
 - keinen gemeinsamen Punkt hat,
 - einen gemeinsamen Punkt hat,
 - zwei gemeinsame Punkte hat,
 - drei gemeinsame Punkte hat oder
 - vier gemeinsame Punkte hat.

Oder auch ohne Zeichnung:

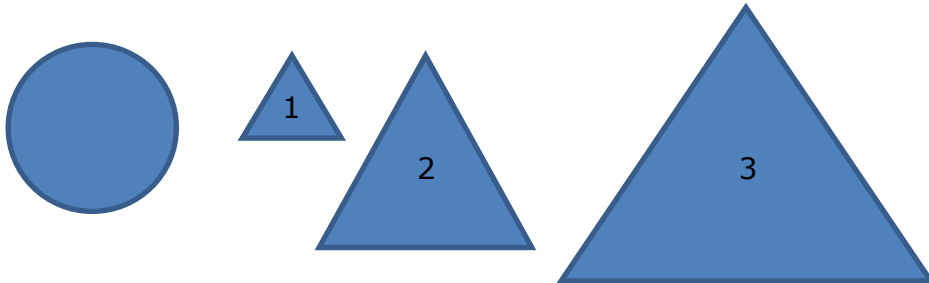
- Wie viele Schnittpunkte können höchstens entstehen wenn ein Kreis von drei Geraden geschnitten wird?

Die Schülerinnen und Schüler können umgekehrt auch aufgefordert werden, die Lage der Geraden zum Kreis in Darstellungen zu beschreiben, z. B.:



Bei der vorliegenden Testaufgabe spielen auch die Größenverhältnisse der beteiligten geometrischen Objekte eine Rolle. Mit folgender Übung kann den Schülerinnen und Schülern dieser Sachverhalt nahe gebracht werden:

- Jeder Schüler bereitet die abgebildeten Figuren aus Papier vor:



Auftrag:

Ermittle mit diesen verschiedenen Dreiecken die jeweils möglichen Lagebeziehungen mit dem Kreis.

Diese Aufgabenstellung lässt sich auch am PC umsetzen. Es besteht die Möglichkeit die geometrischen Figuren mit einfachen Zeichenprogrammen zu erzeugen und danach ineinander zu verschieben, oder mit dynamischer Geometriesoftware zu arbeiten, bei der man sehr flexibel die Größen der Objekte verändern kann.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe gelöst haben, können anspruchsvollere Lagebeziehungen betrachten und eventuell sogar die Lösungen anschaulich in einer Präsentation darstellen:

- Untersuche alle möglichen Lagebeziehungen und die Anzahl der gemeinsamen Punkte zwischen einem Kreis und einem Rechteck.
- Skizziere alle möglichen Lagebeziehungen zwischen zwei Kreisen und einem Dreieck, so dass die Anzahl der Schnittpunkte genau fünf beträgt.

Aufgabe 20: Würfel

Aufgabe

Klaus hat 80 gleich große würfelförmige Bausteine aus Holz. Er behauptet, dass nur ein Baustein übrig bleibt, wenn er mit diesen Bausteinen den größtmöglichen Würfel zusammensetzt.

Hat Klaus Recht? Begründe deine Meinung.

Klaus hat _____.

Begründung:



Lösung

Richtige Entscheidung **und** richtige, vollständige Begründung

Entscheidung: Klaus hat **nicht Recht**.

Begründung, z. B.:

- (1) Der größtmögliche Würfel besteht aus 64 ($= 4 \cdot 4 \cdot 4$) Bausteinen. Es bleibt also nicht nur 1 Baustein, sondern es bleiben 16 Bausteine übrig.
(Beim nächst größeren Würfel werden 125 ($= 5 \cdot 5 \cdot 5$) Bausteine benötigt.)
- (2) 79 lässt sich nicht in drei gleiche Faktoren zerlegen.
- (3) zeichnerische Darstellung des Sachverhaltes
- (4) ...

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2) Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine mathematische Argumentation (K1), bei der sie die Eigenschaft eines Würfels nutzen, dass alle Kanten gleich lang sind (L3). Obwohl durch die Aufgabenstellung keine konkreten Maße gegeben sind, müssen sie erkennen, dass ein Würfel stets mit n^3 ($n \geq 1$) gleich großen kleinen Würfeln gebaut wird. Der Zusammenhang zwischen der Kantenlänge und dem Volumen eines Würfels spiegelt dies wieder. Die Schülerinnen und Schüler bilden die Kubikzahlen von 4 und 5 und vergleichen das Ergebnis mit 79. Die würfelförmigen Bausteine können dabei als Einheitswürfel (Grundprinzip des Messens) aufgefasst werden (L2, K2, K5). Die Schülerinnen und Schüler müssen ein anspruchsvolles Problem durch

strategiegestütztes Vorgehen lösen. Die notwendige mathematische Argumentation verlangt mehrschrittiges Vorgehen und sichere Zahlenvorstellungen im Bereich der natürlichen Zahlen (AB III).

Ein häufig auftretender **Fehler** wird eine falsche Begründung der Aussage „Klaus hat nicht Recht“ sein. Die Schülerinnen und Schüler gehen von der falschen Annahme aus, dass eine gerade Anzahl Bausteine genüge, um daraus ohne Rest einen Würfel zu bauen. Sie behaupten, dass aus 80 Steinen ein Würfel zu bauen sei.

Bearbeitung durch einen Schüler:

Klaus hat unrecht.

Begründung: Weil 80 eine grade Zahl ist und man das Linkriegt.

Die Ursachen können darin zu finden sein, dass sie aus dem Volumen nicht auf die Kantenlänge schließen können. Möglicherweise ist einigen Schülerinnen und Schülern nicht klar, dass alle Kanten eines Würfels gleich lang sind.

Zur **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler nach den Kantenlängen der von ihnen vorgeschlagenen Würfel gefragt werden.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten die Eigenschaften eines Würfels noch einmal nahe gebracht werden. Dabei werden die Unterschiede zu anderen Quadern betont. Die Berechnung des Volumens muss in Verbindung mit einer entsprechenden Vorstellung, die bei der Anzahlbestimmung hilft, noch einmal in den Mittelpunkt gerückt werden. Wobei zuerst vorwärts und dann erst, wie es die Testaufgabe verlangt, rückwärts gearbeitet werden sollte.

- Du hast viele gleich große kleine Bausteine. Baue aus diesen große Würfel. (Bausteine zur Verfügung stellen oder nur in der Vorstellung bauen und die folgende Tabelle nutzen).
- Fülle die Tabelle aus.

Anzahl der kleinen Würfel	8		64	
Anzahl der kleinen Würfel in einer Kante des großen Würfels		3		10

- Beschreibe die Seitenflächen eines Würfels (Quaders).
- Die Grundfläche eines Körpers sei ein Quadrat. Um was für einen Körper könnte es sich handeln? Nutze Bausteine und baue (zeichne) diese Körper.

- Was weißt du über die Länge, Breite und Höhe eines Würfels?
- Was weißt du über die Kantenlängen eines Würfels?
- Berechne die Anzahl nötiger Bausteine für einen Würfel, der eine „Kantenlänge“ von 2 (3; 4; 5) Bausteinen hat.
- Ergänze die Tabelle.

Kantenlänge des Würfels	6 cm		12 cm	
Volumen des Würfels		1000 cm ³		8000 cm ³

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten an komplexere Argumentationen herangeführt werden. Sie können aufgefordert werden, eigene Ideen zu dem „Würfelproblem“ zu finden.

- Warum genügt es nicht, eine gerade Zahl an kleinen Würfeln zu haben, um einen große Würfel zu bauen? Finde Gegenbeispiele.
- Finde eine Möglichkeit, mit einer ungeraden Anzahl von kleinen Würfeln einen größeren zu bauen (zu zeichnen). Beschreibe dein Vorgehen.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kantenlänge und Volumen eines Würfels (eines Quaders) und umgekehrt?
- Die „Kantenlänge“ eines Würfels beträgt 2 (3; 4; 5) Bausteine. Wie viele Bausteine liegen dann im „Inneren“ des Würfels, haben also keine Berührung zur Außenfläche?
- Zeichne räumliche Darstellungen von Würfeln, die aus Einheitswürfeln gebaut wurden. Erkläre an Hand deiner Darstellung den Zusammenhang zwischen den Bausteinen und dem „großen“ Würfel.