

Lernstandserhebung

Didaktisches Material

6

Mathematik (Heft C)

Impressum

Erarbeitet durch

AufgabenentwicklerInnen des Länderverbundprojektes Lernstand / VERA 6:

Manfred Bergunde	Hamburg
Kerstin Both	Mecklenburg Vorpommern
Maria Braunhofer	Italien, Südtirol
Detlef Cords	Mecklenburg Vorpommern
Stefan Cyriax	Sachsen
Helmut Fehre	Sachsen
Klaus Gülker	Mecklenburg Vorpommern
Stefanie Heinisch	Hamburg
Angelika Klatte	Sachsen
Evelin Klingebiel	Thüringen
Heide Kretzschmar	Mecklenburg Vorpommern
Ralf Lienenbecker	Hessen
Sibylle Mackenroth	Sachsen
Heidi Viertel	Sachsen
Peter Weigert	Sachsen
Sylvia Welisch	Hessen

Koordination und Leitung:

Astrid Fischer-Paulin	SBI, Radebeul
Michaela Schober	Thillm, Bad Berka
Heiko Wontroba	Thillm, Bad Berka

Begutachtung und Beratung:

Dr. Christa Herwig	Thüringen
Dr. Dominik Leiß	Leuphana Universität, Lüneburg

Inhaltsverzeichnis

Impressum.....	2
Inhaltsverzeichnis	3
Zuordnung von Standardmerkmalen	4
Vorbemerkungen.....	5
Aufgabe 1: Veranschaulichung von Brüchen	7
Aufgabe 2: Entscheiden und Begründen	9
Aufgabe 3: Fischfutter	12
Aufgabe 4: 24 Stunden	14
Aufgabe 5: Gartengrundstück	17
Aufgabe 6: Holzkörper	21
Aufgabe 7: Kneten und Formen.....	24
Aufgabe 8: Fußgängerüberweg	26
Aufgabe 9: Achsensymmetrische Figur.....	29
Aufgabe 10: Busfahrplan	32
Aufgabe 11: Vereinsfarben	36
Aufgabe 12: Kreise	38
Aufgabe 13: Busfahrt.....	42
Aufgabe 14: Wackelturm	45
Aufgabe 15: Würfelnetz	47
Aufgabe 16: Zwei Klassen	49
Aufgabe 17: Erweitern	52
Aufgabe 18: Gewichtige Rechnung	55
Aufgabe 19: Würfel - Vergrößerungen.....	57
Aufgabe 20: Bruchrechnung	60
Aufgabe 21: Wasserdruck.....	62
Aufgabe 22: Seillänge	67
Aufgabe 23: Gleichung.....	70
Aufgabe 24: Kreisteile.....	72
Aufgabe 25: Würfeltunnel.....	75
Aufgabe 26: Dreiecksfigur	77

Zuordnung von Standardmerkmalen

Aufgaben		Allgemeine mathematische Kompetenzen						Leitideen					Anforderungsbereiche		
Nr.	Kurztitel	K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	I	II	III
1	Veranschaulichung von Brüchen				X	X		X					X		
2	Entscheiden und Begründen	X				X			X					X	
3	Fischfutter			X		X					X			X	
4	24 Stunden			X		X		X							X
5	Gartengrundstück		X		X	X			X					X	
6	Holzkörper		X		X		X			X					X
7	Kneten und Formen		X			X			X					X	
8	Fußgängerüberweg				X		X					X		X	
9	Achsensymmetrische Figur				X	X				X				X	
10	Busfahrplan			X		X	X		X					X	
11	Vereinsfarben			X	X		X	X						X	
12	Kreise		X		X		X	X							X
13	Busfahrt			X		X					X			X	
14	Wackelturm			X		X			X					X	
15	Würfelnetz		X		X					X				X	
16	Zwei Klassen				X		X					X		X	
17	Erweitern	X				X		X						X	
18	Gewichtige Rechnung					X			X				X		
19	Würfel - Vergrößerungen		X		X				X	X				X	
20	Bruchrechnung					X		X					X		
21a	Wasserdruck				X							X	X		
21b	Wasserdruck			X	X						X			X	
22	Seillänge	X		X		X		X							X
23	Gleichung			X		X					X			X	
24	Kreisteile				X	X		X					X		
25	Würfeltunnel		X		X					X					X
26	Dreiecksfigur		X		X						X				X

Legende:

Allgemeine mathematische Kompetenzen

- K1: Mathematisch argumentieren
 K2: Probleme mathematisch lösen
 K3: Mathematisch modellieren
 K4: Mathematische Darstellungen verwenden
 K5: Mit formalen, technischen und symbolischen Elementen der Mathematik umgehen
 K6: Kommunizieren

Leitideen

- L1: Zahl
 L2: Messen
 L3: Raum und Form
 L4: Funktionaler Zusammenhang
 L5: Daten und Zufall

Anforderungsbereiche

- I: Reproduzieren
 II: Zusammenhänge herstellen
 III: Verallgemeinern und Reflektieren

Vorbemerkungen

Adressaten sind Lehrkräfte, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie weitere Lehrkräfte, Fachkonferenzen und innerschulische Gruppen. Sie alle sollen durch das vorliegende Material angeregt werden, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu erkennen, insbesondere im Hinblick auf die individuelle Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler.

Aufbau und Struktur sind durch die Aufgaben des Tests bestimmt. Jede Aufgabe ist kommentiert. Der Umfang und die Tiefe des Kommentars richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zur schnelleren Orientierung zusätzlich am unteren Rand ersichtlich.

Eine Kommentierung zu einer Aufgabe umfasst folgende Teile:

- Begründung für die Zuordnung der Standardeigenschaften¹ zu einer Aufgabe (und damit der Hinweis auf das didaktische Potential der Aufgabe),
- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler (u. a. häufig zu erwartende Fehler und Hinweise zur Diagnose),
- Hinweise zur Weiterarbeit.

An verschiedenen Stellen der Kommentierungen erfolgt der Verweis zur Veröffentlichung „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ des IQB, weil in diesem Buch eine große Anzahl von Aufgaben mit ausgewiesenen Standardbezügen und Unterrichts Anregungen vorgestellt werden.

Bezüge zu den Bildungsstandards sind bei der Erarbeitung bzw. Auswahl der Aufgaben für den Test hergestellt worden. Sie werden im vorliegenden Material zum einen durch die Analyse der Standardeigenschaften bei jeder Aufgabe, zum anderen durch die Verteilung jeder Standardeigenschaft in der Menge aller Aufgaben eines Testheftes deutlich. Nicht in jedem Testheft gelingt es, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter konnte von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilen nur eine Teilaufgabe ausgewählt werden und es musste auf weitere mathematisch interessante Aspekte verzichtet werden. Die Kommentierungen ermöglichen aber, weitere Teilaufgaben aufzugreifen und Aufgabenvariationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung ist es, Lehrkräfte in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei jeder Schülerin und jedem Schüler zu unterstützen. Dazu müssen sie u. a. Klarheit darüber haben, welches Potential in einer Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann. So kann über längere Zeiträume hinweg am Aufbau von Kompetenzen gearbeitet werden. Im vorliegenden Material wird für jede Aufgabe die Zuordnung zu den Standardmerkmalen (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen wird so

¹ Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 4.12.2003, S.7 – 15.

deutlich, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zu einer mathematischen Kompetenz bestimmt.

Überlegungen, die Schülerinnen oder Schüler beim Bearbeiten der Testaufgaben ausgeführt haben können, sind Teil jeder Kommentierung. Es werden in diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Aufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und häufig zu erwartende Fehler betrachtet und darüber hinaus Hinweise zur Diagnose gegeben. Dies soll die Lehrkräfte dabei unterstützen, Ansätze zur individuellen Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler zu entwickeln. Weiterhin enthält die Kommentierung für jede Aufgabe Vorschläge, wie diese verändert bzw. variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Die Vorschläge beinhalten auch Anregungen zur Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, Hinweise auf den Umgang mit verschiedenen Lösungen und Überlegungen zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegebenen Sachverhalts. Es wird deutlich, wie sich Testaufgaben und Lernaufgaben unterscheiden.

An der Weiterentwicklung wird von Jahr zu Jahr gearbeitet. So wird angestrebt, die Kommentierungen zu den einzelnen Aufgaben in den nächsten Jahren in Form einer Online-Datenbank anzubieten. Hinweise zum vorliegenden Material nehmen wir gern unter kompetenztest@sbi.smk.sachsen.de entgegen.

Literatur:

- /1/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 04.12.2003
- /2/ W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006
- /3/ Kommentierungshefte zu den Haupttests 2008, 2009 und 2010
- /4/ www.kompetenztest.de
- /5/ Das Mathematikbuch – Lernumgebungen, Ausgabe A, Schülerbuch - 6. Schuljahr, Ernst Klett Verlag

Aufgabe 1: Veranschaulichung von Brüchen

Aufgabe

Veranschauliche $\frac{3}{4}$ von einem Ganzen durch eine Skizze.

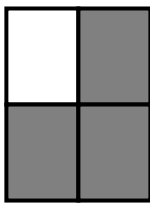
Lösung

Richtige und vollständige Skizze:

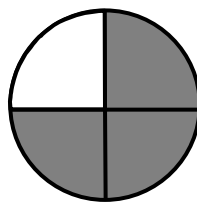
Eine Figur wurde in vier gleich große Teile zerlegt. Drei dieser Teile wurden hervorgehoben.

z.B.:

(1)



(2)



(3) ...

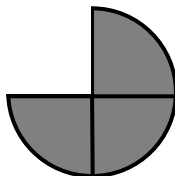
Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die **Schülerinnen und Schüler** visualisieren ihre Vorstellungen eines Bruches und verwenden dazu eine schematische Darstellung (L1, K4). Die Kenntnis der Bedeutung von Zähler und Nenner bildet dabei eine Voraussetzung (K5). Es werden vertraute und geübte Darstellungen angewandt (AB I).

Fehler sind zu erwarten, wenn keine Sinn tragenden Vorstellungen von Brüchen entwickelt wurden. Das kann z. B. dazu führen, dass drei Teile ohne einen Bezug zum Ganzen dargestellt werden.



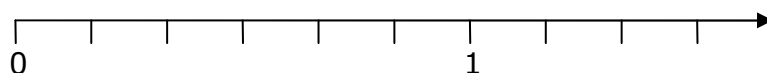
Für eine detaillierte **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Darstellung zu kommentieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Das Visualisieren von Sachverhalten dient der Entwicklung des Vorstellungsvermögens der Schülerinnen und Schüler in vielen Bereichen der Mathematik. Es erleichtert das Verständnis und damit den Zugang zu mathematischen Fragen und Problemen und kann vielfältig eingesetzt werden. Schwerpunkt des Unterrichts sollte die Erarbeitung eines von der Vorstellung getragenes Verständnis von Brüchen sein.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, haben unzureichende Vorstellungen von Brüchen. Ihnen ist der Zusammenhang zwischen Teilen und ihrem Ganzen nicht bewusst oder sie haben Probleme bei der Darstellung der Teile von Ganzen. Anschauliches Arbeiten kann hier hilfreich sein. Die Schülerinnen und Schüler sollten angeregt werden, zu zeichnen oder auch zu basteln. Dabei können die folgenden Aufgaben hilfreich sein.

- Schneide zwei verschieden farbige Kreise mit gleichem Radius ($r = 5 \text{ cm}$) aus. Schneide in jeden Kreis einen Radius ein. Stecke die Kreise in den Radien ineinander. Drehe an einem Kreis und stelle so verschiedene Anteile von Ganzen dar.
- Den wievielten Teil deiner Klasse bildest du?
- Zeichne ein Quadrat. Kennzeichne die Hälfte (ein Viertel, ein Drittel, drei Viertel) des Quadrates farbig.
- Trage folgende Brüche auf dem Zahlenstrahl ein. Begründe deine Zuordnung. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{6}{6}; \frac{3}{2}$



- Stelle $\frac{4}{3}$ auf einem Zahlenstrahl dar.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, haben Sinn tragende Vorstellungen von Brüchen entwickelt. Ihnen können anspruchsvollere Aufgaben, wie im Folgenden dargestellt, angeboten werden.

- Stelle $\frac{5}{4}$ eines Ganzen mit Hilfe geometrischer Figuren dar.
- Veranschauliche $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
- Beschreibe den Unterschied in der Darstellung von echten und unechten Brüchen.
- Veranschauliche $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ so, dass deine Mitschüler sich die Aufgabe vorstellen können. Erkläre anhand deiner Darstellung, dass $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$ nicht lösbar ist.

Aufgabe 2: Entscheiden und Begründen

Aufgabe

Sind $\frac{1}{4}$ h, 90 s und 115 min zusammen weniger als 2 Stunden?

- ☐ ja
☐ nein

Begründe deine Entscheidung.

Lösung

Die Entscheidung und die Begründung sind richtig.

Entscheidung: ☐ ja
☒ nein

Begründung:

z. B.

(1) durch Überschlag, auch in Verbindung mit verbalen Formulierungen:

$$2 \text{ h} = 120 \text{ min}$$

Ausgehend von 115 min fehlen nur 5 min.

$$\frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min}$$

Mit nur zwei Summanden werden die 2h bereits überschritten.

(2) durch Rechnung:

$$15 \text{ min} + 1,5 \text{ min} + 115 \text{ min} = 131,5 \text{ min}$$

$$= 2 \text{ h } 11 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$2 \text{ h } 11 \text{ min } 30 \text{ s} > 2 \text{ h}$$

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mathematisch argumentieren (K1) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bilden die Summe vorgegebener Zeitspannen. Dafür ist zunächst mindestens eine Zeitspanne in eine geeignete Maßeinheit umzurechnen (L2, K5). Das Ergebnis muss mit der Vorgabe „2h“ verglichen und eine begründete Entscheidung getroffen werden (K1). Die Begründung kann entweder durch einen Überschlag oder eine exakte Rechnung, auch in Verbindung mit verbalen Formulierungen, erfolgen. Der Lösungsweg ist mehrschrittig (AB II).

Fehler in der Argumentation können auf Rechenfehler, mangelnde Grundvorstellungen bei Zeitangaben und das ungenügende Beherrschen von Umrechnungszahlen zurückzuführen sein. Eine weitere Fehlerquelle stellt der angegebene Bruchteil dar. Ebenso ist es denkbar, dass die Schülerinnen und Schüler die Formulierung „weniger als“ in Verbindung mit den Entscheidungsalternativen „ja“ oder „nein“ missverstehen. Eine **Diagnose** lässt sich in vielen Fällen der schriftlich fixierten Begründung entnehmen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten Beispiele zum Umrechnen von Maßeinheiten der Zeit besprochen und geübt werden, z. B.:

- Rechne um:
 3 Minuten = ... Sekunden
 120 Minuten = ...Stunden
 4 Stunden = ... Minuten
 10 Sekunden = ... Minuten

In derartige Übungen lassen sich leicht einfache Bruchteile einbeziehen, z. B.:

- Gib als Anteil einer Stunde an:
 15 Minuten, 20 Minuten, 45 Minuten

Sind bei den Schülerinnen und Schülern die Vorstellungen über Repräsentanten von Zeitspannen nicht tragfähig genug, kann es hilfreich sein, Vorgängen aus dem täglichen Erfahrungsumfeld Zeitspannen zuzuordnen oder umgekehrt zu vorgegebenen Zeitspannen passende Vorgänge zu suchen.

- Wie lange dauern folgende Vorgänge? Schätze.
 - a) das Toasten einer Scheibe Brot
 - b) das Abspielen deines Lieblingssongs
 - c) dein Schulweg
 - d) ein Augenzwinkern
 - e) deine Hausaufgaben heute Nachmittag
 - f) der Sprung ins Wasser vom 3 m-Brett
 - g) das Anstreichen der Wände deines Zimmers
- Schätze, welche Vorgänge etwa 1 Sekunde, 30 Sekunden, 1 Minute, 30 Minuten, 1 Stunde, 30 Stunden dauern.

Aufgaben zum Addieren von Zeitspannen können sich anschließen:

- Johanna spielt vier Lieder von einer CD ab:
 Wie lange dauert das Abspielen dieser Lieder, wenn zwischen den Liedern
 - a) keine Pause ist?
 - b) jeweils 3 Sekunden Pause sind?

Titel	Spieldauer
Red Rose	2min 53 s
Fading	3 min 29 s
Lean On Me	4 min 15 s
Final Hour	3 min 43 s

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können komplexere Aufgaben, z. B. zu Fahrplänen, bearbeiten.

- Sven will mit dem Zug von Wiesbaden nach Stuttgart fahren. Er hat sich zwei mögliche Verbindungen herausgesucht.

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit		Produkte
Wiesbaden Hbf	Di, 06.10.11	ab	13:39	RB, EC
Stuttgart Hbf	Di, 06.10.11	an	15:53	
Wiesbaden Hbf	Di, 06.10.11	ab	14:24	ICE, IC
Stuttgart Hbf	Di, 06.10.11	an	16:08	

Berechne die Fahrzeit für beide Verbindungen.

Leistungstärkere Schülerinnen und Schüler können auch den Auftrag erhalten, mit Hilfe des Reiseportals der Deutschen Bahn Aufgaben für ihre Mitschülerinnen und Mitschüler zu erarbeiten.

Mögliche Vorgaben für die Aufgabenstellungen können hier sein:

- Berechne die Fahrzeit.
- Berechne die Ankunftszeit.
- Wie lange sitzt der Reisende im Zug? Wie lange wartet er auf Anschlusszüge? (hier: Verbindungen, die mindestens zweimaliges Umsteigen erfordern)
- Welche Verbindung würdest du bei kürzester Fahrtzeit wählen? Begründe deine Entscheidung.

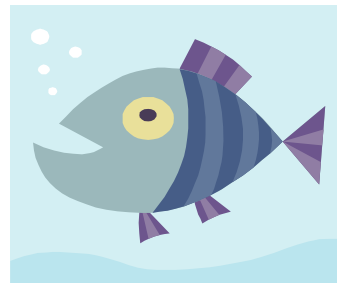
Aufgabe 3: Fischfutter

Aufgabe

Lino hat in seinem Aquarium 18 Fische.
Diese muss er jeden Tag mit 6 Futtertabletten füttern.
Zum Geburtstag schenkt ihm seine Oma noch 6 dieser Fische, die Lino zu den anderen ins Aquarium gibt.

Wie viele Futtertabletten muss Lino jetzt jeden Tag füttern?

Lino muss jetzt jeden Tag _____ Futtertabletten füttern.



Lösung

8

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung dieser Aufgabe muss ein Zusammenhang zwischen Anzahl der Fische und Anzahl der Futtertabletten in einer Realsituation erkannt und verwendet werden (L4, K3). Die Lösung ergibt sich aus proportionalen Zusammenhängen wie $18 : 24 = 6 : x$ oder entsprechenden Gleichungen wie $6 : 18 = \frac{1}{3}$. Auch durch die Verwendung von Zuordnungsgraphen oder Tabellen gelangt man zum Ergebnis (K5). Nur das Ergebnis ist gefragt, ein Lösungsweg muss nicht dargestellt werden. In der Regel werden die Schülerinnen und Schüler entweder die Tablettenanzahl für die neuen Fische ausrechnen und zur alten Tablettenanzahl addieren oder unter Ausnutzung der Proportionalität zunächst das elementare Wertepaar bestimmen und dann das Ergebnis berechnen, z. B. (3 Fische / 1 Tablette) $\rightarrow$ (24 Fische / 8 Tabletten), so dass der Lösungsweg mehrschrittig ist (AB II). Es ist jedoch nicht auszuschließen, dass Schülerinnen und Schüler auch durch Schätzen oder falsches Schließen auf die richtige Tablettenzahl kommen.

Als zu erwartende **Fehler** kommen hauptsächlich in Frage: Fehler, denen ein falsches mathematisches Modell zu Grunde liegt, oder Rechenfehler.

Die Lösungsnotizen im Testheft können für eine **Diagnose** hilfreich sein. Genauerer Aufschluss über die Fehlerursache erbringen mündliche Äußerungen. Eine Nicht-Bearbeitung könnte darauf hindeuten, dass die Schülerin oder der Schüler entweder Unsicherheiten im Finden bzw. Anwenden eines

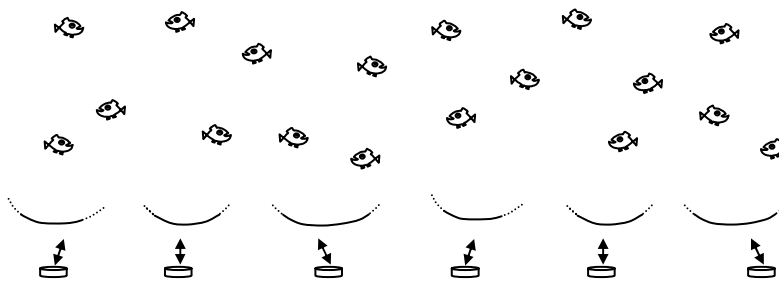
mathematischen Modells hat, oder dass der Realsituation praktische Probleme unterstellt werden, die einer Modellierung im Wege stehen, z.B. durch ein Festhalten an der Frage: „Wie machen es 18 Fische, wenn sie sich 6 Tabletten teilen sollen?“.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich vor allem solche Übungen an, die das Modellieren schulen, denn das Rechnen innerhalb des Modells ist bei dieser Aufgabe so einfach, dass Rechenfehler zwar vorkommen können, aber in der Regel kein Indiz für die Notwendigkeit gezielten Rechentrainings darstellen. Um von der geschilderten Situation zum mathematischen Modell zu gelangen, ist eine anschauliche Vorstellung von der Realsituation nützlich. Diese kann sich z. B. an bildlichen Darstellungen entwickeln, die zusammen mit Form bildenden Elementen eine Grundlage für das mathematische Modell geben.

Beispiel:

- Hier siehst du eine Skizze von 18 Fischen und 6 Futter-Tabletten. Jeder Fisch soll gleich viel Futter bekommen. Fasse durch Umrandungen jeweils diejenigen Fische zusammen, die sich eine Futter-Tablette teilen sollen.



An diese Übung könnte sich die Aufforderung anschließen, 6 weitere Fische zu skizzieren und die Einteilung bei den gegebenen Voraussetzungen fortzusetzen.

Wenn die bildliche Vorstellung der Realsituation sicher vorhanden ist, können die üblichen Mittel der Dreisatzrechnung, z. B. Ausformulieren in Sätzen oder Anlegen von Tabellen vertiefend eingesetzt werden.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können sich mit anderen Aufgaben-Varianten der Dreisatzrechnung befassen oder eigene Aufgaben erfinden.

Aufgabe 4: 24 Stunden

Aufgabe

Jeder Tag hat 24 Stunden.

Im Durchschnitt ist jeder Mensch $\frac{2}{3}$ eines Tages wach, den Rest der Zeit schläft er.

Viele Menschen verbringen durchschnittlich $\frac{1}{8}$ der Zeit, die sie wach sind, vor dem Fernseher.

Wie viele Stunden verbringen diese Menschen durchschnittlich jeden Tag vor dem Fernseher?

Diese Menschen verbringen durchschnittlich jeden Tag _____ Stunden vor dem Fernseher.

Lösung

2

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler übersetzen eine reale Situation in eine mathematische Struktur (K3). Zur Lösung benötigen sie Sinn tragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen (L1). Es gibt prinzipiell zwei Vorgehensweisen:

1. Schrittweises Umrechnen der genannten Anteile in Stunden oder
2. Berechnung des Anteils vom Anteil und abschließende Bestimmung der Stundenanzahl (K5).

Der zweite Weg erscheint durch die Multiplikation zweier Brüche schwerer, ist aber hinsichtlich der Bestimmung der Stundenanzahl einfacher. Im Falle eines Verzichts auf das Kürzen ist es möglich, die Stundenzahl direkt im Zähler abzulesen. Der Lösungsweg ist für Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe komplex (AB III).

Als **Fehler** sind in erster Linie Rechenfehler oder Verwechslungen (z. B. von Schlaf- und Wachzeit) zu erwarten. Bei fehlendem Verständnis für die zu modellierende Realsituation wird vermutlich eher die Aufgabe unbearbeitet bleiben. Bei wenigen Schülerinnen und Schülern kann es auch Unsicherheiten über die Anzahl der Stunden eines Tages geben. Es ist nicht ausgeschlossen, dass Schülerinnen oder Schüler versuchen, das Ergebnis durch Raten zu

bestimmen, wenn sie die Aufgabenstellung mathematisch nicht durchdrungen haben.

Zur **Diagnose** empfiehlt sich sowohl eine Betrachtung vorhandener Lösungsnotizen als auch ein Interview mit den Schülerinnen und Schülern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet es sich an, einfachere Anteilsberechnungen zu wiederholen, z. B.:

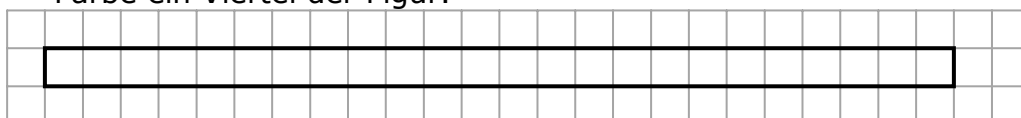
- Wie viele Stunden hat $\frac{1}{4}$ eines Tages (haben $\frac{3}{4}$ eines Tages)?

Im Hinblick auf ein Grundverständnis für Anteile vom Ganzen wäre auch die Umkehrung zu wiederholen:

- Welchen Anteil an einem Tag haben 6 Stunden Schulbesuch?

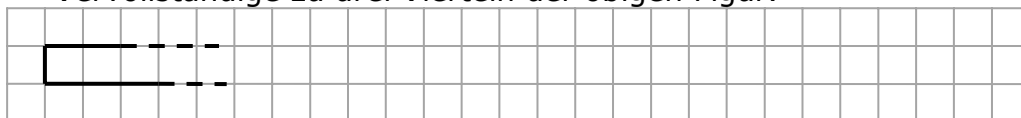
Hilfreich können hierbei auch grafische Darstellungen sein, z. B. in Kreisdiagrammen oder in Rechtecken mit 24 gleichen Teilen (Kästchen). Das Grundverständnis kann beispielsweise wie folgt gefördert werden:

- Färbe ein Viertel der Figur.



Wie kannst du die Anzahl der einzufärbenden Kästchen ausrechnen?

- Vervollständige zu drei Vierteln der obigen Figur.



Wie kannst du die Anzahl der Kästchen in der entstandenen Figur ausrechnen?

Auch für die Aufeinanderfolge der Anteilsangaben für beide Lösungsansätze der vorliegenden Aufgabe bieten sich Unterstützungen in Form von Abbildungen an. Die Berechnung eines Anteils vom Anteil kann folgendermaßen veranschaulicht werden:

$$\frac{3}{4} \text{ von } 24 = 18$$



$$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{3}{4} \text{ von } 24 = 12$$



Rechnerisch bedeutet dies: $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ sind $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

$\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von 24 ist also $\frac{1}{2}$ (die Hälfte) von 24.

- Drücke durch einen einzigen Bruch aus und erfinde Aufgabentexte zu den Anteilsangaben.

a) $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ von $\frac{2}{5}$ c) $\frac{4}{9}$ von $\frac{3}{4}$.

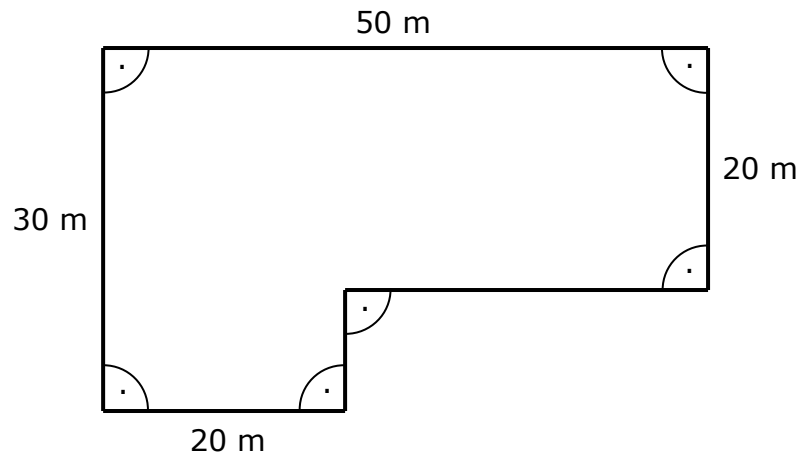
Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, lassen sich schwerere Anteilsberechnungen üben, z. B. unter Einbeziehung von Bruchteilen von Stunden oder mit Variationen der Fragestellung.

- Jens verbringt heute $5\frac{1}{2}$ Zeitstunden in der Schule. Er hat 6 Unterrichtsstunden. Jede Unterrichtsstunde dauert 45 Minuten. Welcher Anteil der $5\frac{1}{2}$ Stunden ist Unterrichtszeit (Pausenzeit)?
- In Claras Klasse sind gleich viele Mädchen wie Jungen. $\frac{2}{3}$ der Mädchen und $\frac{3}{4}$ der Jungen kommen mit dem Bus zur Schule. Welcher Anteil der Schülerinnen und Schüler der ganzen Klasse kommt mit dem Bus zur Schule?

Aufgabe 5: Gartengrundstück

Aufgabe

Die Abbildung zeigt die Form und die Abmessungen eines Gartengrundstücks.



Wie groß ist der Umfang des Gartengrundstücks?

Der Umfang des Gartengrundstücks beträgt _____ m.

Lösung

160

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen der Abbildung Informationen (K4), bestimmen die fehlenden Seitenlängen (K2) und berechnen anschließend durch Addition aller Seitenlängen den Umfang (L2, K5, AB II). Rationeller können sie rechnen, wenn sie erkennen, dass durch Verschieben der unbekannten Seitenlängen ein Rechteck entsteht, welches den gleichen Umfang hat wie das Gartengrundstück [$2 \cdot 50 \text{ m} + 2 \cdot 30 \text{ m}$ oder $(50 \text{ m} + 30 \text{ m}) \cdot 2$] (K2).

Die Angabe 120 deutet auf den **Fehler** hin, dass Schülerinnen und Schüler nur die beschrifteten Seitenlängen addiert haben. Nicht erkennbar ist, ob sie die fehlenden Seitenlängen nicht bestimmen konnten oder diese nicht beachtet haben. Sollte nur eine der fehlenden Größen ermittelt worden und in die Rechnung eingegangen sein, wäre als Ergebnis 150 oder 130 zu erwarten.

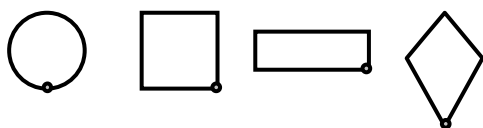
Möglich ist auch die Verwechslung mit der Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks ($50 \cdot 30 = 1500$) oder als Summe rechteckiger Teilflächen ($20 \cdot 50 + 20 \cdot 10 = 1200$ bzw. $20 \cdot 30 + 30 \cdot 20 = 1200$). Eine weitere Fehlerquelle wäre auch die Umfangsberechnung von Teilrechtecken mit anschließender Addition, erkennbar am Ergebnis 200.

Hinweise zur Weiterarbeit

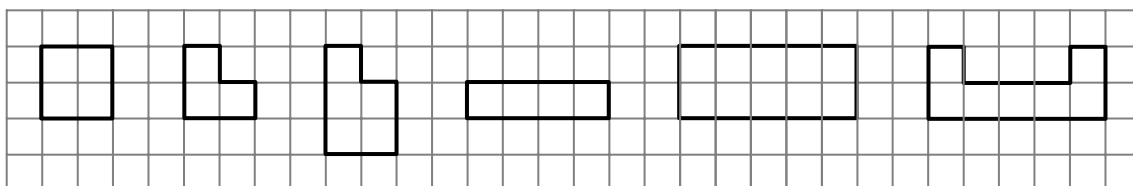
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten den Umfangsbegriff in vielfältiger Weise verinnerlichen. Ausgehend von Gegebenheiten aus ihrer Erfahrungswelt (wie Hüftumfang beim Hosenkauf, Randleimer um einen Tisch, Einzäunung von Tiergehegen oder Grundstücken, Fußbodenleisten im Kinderzimmer) sollten sie lernen, dieses Problem zu mathematisieren.

Sie könnten aufgefordert werden, mit einer bestimmten Anzahl von Legestäbchen verschiedene Figuren zu legen, wobei sie erkennen sollten, dass alle aus gleich vielen Stäbchen gelegten Figuren den gleichen Umfang haben. Der Umfang wird zunächst als Anzahl der Stäbchenlängen angegeben, was bei bekannter Länge (z. B. 10 cm) auch in Zentimeter umgerechnet werden könnte. Zur Vertiefung des Umfangsbegriffes könnten die Schülerinnen und Schüler z. B. folgende Aufgaben erhalten:

- Aus jeweils einem Meter Draht wurden Figuren gebogen:

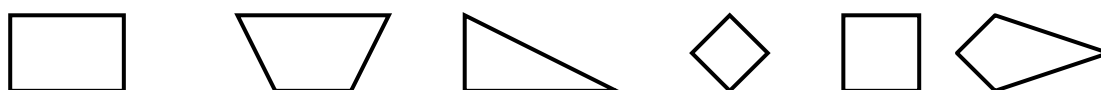


- Begründe, dass jede diese Figuren den gleichen Umfang hat.
- Aus einem Draht mit einer Länge von 1 m soll ein Rechteck gebogen werden. Der Draht soll dabei ohne Überlappung vollständig verwendet werden.
 - a) Wie lang und wie breit könnte ein solches Rechteck werden?
 - b) Gib mindestens drei verschiedene Möglichkeiten an und kontrolliere diese durch Rechnung.
- Bestimme den Umfang der Figuren in Kästchenlängen.



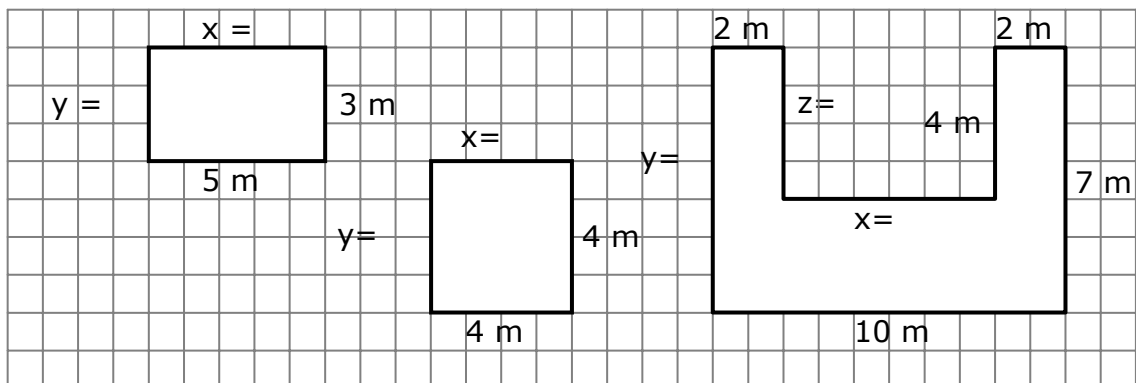
Verallgemeinernd könnten die Schülerinnen und Schüler in weiteren Übungen die Erkenntnis anwenden, dass sich bei n-Ecken der Umfang als Summe aus den Seitenlängen ergibt, z. B.:

- Miss die Seitenlängen und bestimme den Umfang der Figuren.



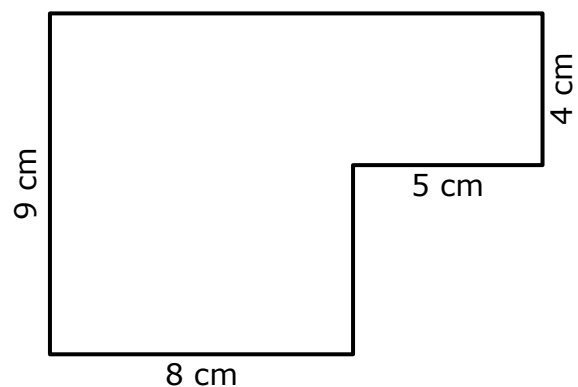
Zur Vorbereitung der Arbeit mit bemaßten Zeichnungen ist die folgende Aufgabenstellung geeignet:

- Bestimme die fehlenden Maße.



Sie greift vor allem den Aspekt auf, dass in Zeichnungen oft nur die unbedingt notwendigen Maße angegeben sind, nicht jedoch diejenigen die sich durch Addition bzw. Subtraktion leicht ermitteln lassen.

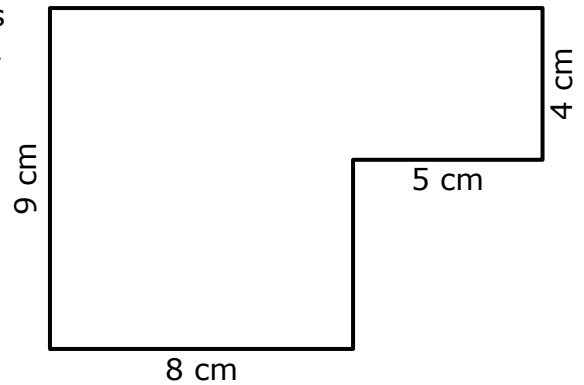
- Berechne den Umfang der aus Rechtecken zusammengesetzten Figur.



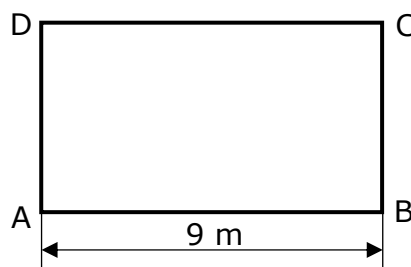
Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, sind Aufgaben geeignet, die die Kenntnisse der Eigenschaften von Vierecken sowie die Umfangs- und Flächenberechnung von Rechtecken in Anwendungen fordern, z. B.:

- Reichen 100 m Maschendrahtzaun zum Einzäunen eines rechteckigen Grundstückes (Länge 30 m, Breite 15 m), wenn man für die Tür mit einer Breite von einem Meter rechnet? Fertige eine Skizze an und begründe durch Rechnung.
- Sind die folgenden Aussagen wahr? Begründe deine Entscheidung.
 - „Wenn alle Seitenlängen eines Quadrates verzehnfacht werden, dann wird der Umfang 40 - mal so groß, denn das Quadrat hat 4 Seiten und $4 \cdot 10 = 40$.“
 - „Wenn sich der Umfang eines Rechtecks verdoppelt, dann verdoppelt sich immer auch sein Flächeninhalt.“
- Wie verändert sich der Umfang eines Quadrats (Rechtecks), wenn sich seine Seitenlängen verdoppeln, verdreifachen ... ?

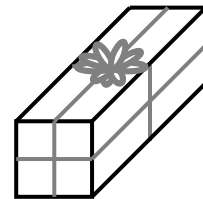
- Wie verändert sich der Umfang der aus Rechtecken zusammengesetzten Figur, wenn die angegebenen Maße jeweils um 1 cm verlängert werden?



- Siehe auch /4/ Kompetenztest Mathematik Klasse 6; 2005, Aufgabe 8: Das Rechteck ABCD (siehe Skizze) hat einen Flächeninhalt von 45 m^2 . Wie groß ist der Umfang des Rechtecks ABCD?



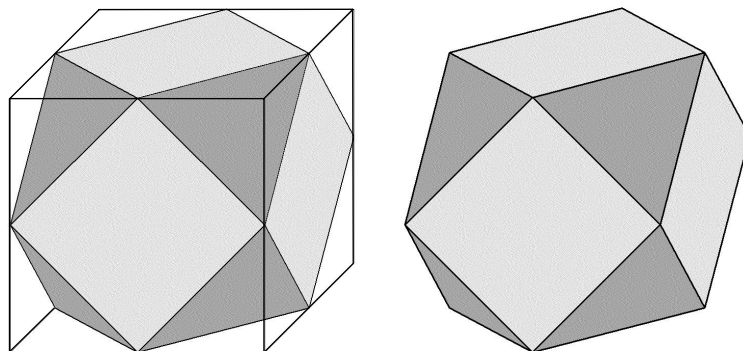
- Du willst ein Geschenk für einen Freund in einem Karton mit den Maßen 10 cm, 10 cm und 30 cm verpacken. Es soll mit einem Band (siehe Bild) verschnürt werden, für die Schleife wird ein halber Meter gebraucht. Berechne, wie viele Meter Band insgesamt notwendig sind.



Aufgabe 6: Holzkörper

Aufgabe

Der rechte Körper wurde wie abgebildet aus einem Holzwürfel hergestellt. Man hat alle Ecken des Würfels in gleicher Weise schräg abgesägt, so dass Dreiecke und Quadrate als Seitenflächen entstanden sind.



Wie viele Kanten hat der rechte Körper? Erkläre, wie du gerechnet hast.

Der rechte Körper hat _____ Kanten.
Erklärung:

Lösung

Die Anzahl der Kanten **und** die Erklärung der Rechnung sind richtig.

Anzahl: 24

Erklärung: z. B.

- (1) Es gibt 6 Quadrate mit jeweils 4 Seiten.
 $6 \cdot 4 = 24$
- (2) Es gibt 8 Dreiecke mit jeweils 3 Seiten.
 $8 \cdot 3 = 24$
- (3) ...

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler benötigen Raumvorstellungen und kennen den Begriff Kante bei Körpern (L3). Sie erkennen das Quadrat an der jeweiligen Seitenfläche und die beim Absägen entstandenen Dreiecke (K4). Über die Anzahl der Quadrate (6) und ihrer Seitenzahl ($6 \cdot 4$) oder der Dreiecke (8) und ihrer

Seitenzahl ($8 \cdot 3$) ermitteln sie die gesamte Anzahl der Kanten des Körpers (24) und beschreiben ihre Vorgehensweise (K2, K6). Sie haben erkannt, dass die Seiten der Quadrate auch Seiten der Dreiecke sind und umgekehrt. Auch kann von den vorn sichtbaren vier Dreiecken mit den 12 Seiten auf das Doppelte an Kanten des Körpers (24) geschlossen werden. Die Lösung der Aufgabe ist mehrschrittig. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten ein anspruchsvolles mathematisches Problem (AB III).

Auftretende **Fehler** weisen auf unzureichende Raumvorstellungen hin. Beim Abzählen der sichtbaren Kanten können einige vergessen oder Kanten mehrfach mitgezählt werden.

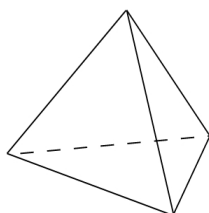
Die Schülerlösungen erlauben anhand der geforderten Erklärungen eine **Diagnose** der Fehlerursache. Hilfreich wird es sein, wenn die Schülerinnen und Schüler im Unterricht angeregt werden, ihr Vorgehen zu beschreiben.

Hinweise zur Weiterarbeit

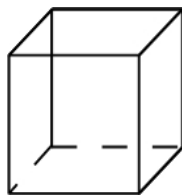
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können durch handelnden Umgang mit Körpermodellen, an denen die Kanten, Ecken und Flächen ertastet werden, die Raumvorstellungen schulen. Durch Kantenmodelle aus Stäben oder gespannten Fäden kann der Aufbau von Raumvorstellung unterstützt werden.

An einem aus Knetmasse geformten Würfel kann man durch Abschneiden einer Ecke die grundlegende Vorstellung zum vorliegenden Körper vermitteln und die Anzahl der entstehenden Kanten bestimmen. Dieses Vorgehen wird dann systematisch beim Abzählen bzw. Berechnen der Kanten fortgesetzt.

Für vergleichbare Übungen eignen sich auch die 5 Platonischen Körper.



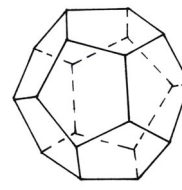
Tetraeder



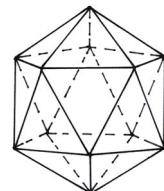
Würfel



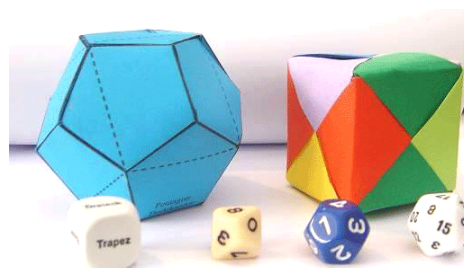
Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können andere komplexe Körper wie Archimedische Körper, Catalanische Körper auf ihre Kantenanzahl untersuchen.



Dabei kann von einem Körper aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler, z. B. dem Fußball, ausgegangen werden.

Eine weitere Differenzierung erfolgt durch die Abstraktion, indem man den Körper nur beschreibt und auf das Modell verzichtet.

- Ein abgestumpfter Würfel hat acht regelmäßige Dreiecke und sechs regelmäßige Achtecke als Begrenzungsflächen. Wie viele Flächen, Ecken und Kanten hat er? (Lösung: $f = 14$, $e = 24$, $k = 36$)
- Ein abgestumpfter Tetraeder hat vier regelmäßige Dreiecke und vier regelmäßige Sechsecke als Begrenzungsflächen. Wie viele Flächen, Ecken und Kanten hat er? (Lösung: $f = 8$, $e = 12$, $k = 18$)

Quellenverzeichnis der Bilder:

- <http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm>
- <http://www.mathematische-basteleien.de/archimedes.htm>
- <http://rigi.zebis.ch/inhalte/unterricht/mathematik/polyeder.pdf>

Aufgabe 7: Kneten und Formen

Aufgabe

Max erhält im Unterricht 10 cm^3 Knetmasse und formt daraus ohne Abfall einen Quader.
Gib eine Möglichkeit für die Kantenlängen dieses Quaders an.

Lösung

Richtige und vollständige Angabe der Kantenlängen

z.B.:

- (1) 1 cm; 2 cm und 5 cm
- (2) 2 cm; 2 cm und 2,5 cm
- (3) ...

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler schließen vom Volumen auf die Kantenlänge eines Quaders (L2). Das Verfahren zur Berechnung des Volumens eines Quaders wird dabei in umgekehrter Reihenfolge angewandt (Rückwärtsarbeiten) und dient gleichzeitig der Ergebniskontrolle (K2, K5). Dabei sind mehrere Lösungsschritte notwendig (AB II).

Schülerinnen und Schülern, die keinen Zugang zu der Aufgabe finden oder sie nur rudimentär bearbeiten, erkennen die Vorgabe nicht als Einheit des Volumens oder ihnen fehlt der erforderliche Zusammenhang zwischen Volumen und Kantenlänge eines Körpers. **Fehler** werden sich vor allem darin ergeben, dass die Kantenlängen unvollständig notiert werden oder ihr Produkt nicht dem vorgegebenen Volumen entspricht.

Für die **Diagnose** ist es erforderlich, die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen erläutern zu lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, benötigen anschauliche Vorstellungen des Begriffs Volumen. Es ist auch möglich, dass ihnen die Formel $V = a \cdot b \cdot c$ nicht geläufig ist. An Hand vielfältiger Beispiele kann das Schließen von der Kantenlänge auf das Volumen und danach auch umgekehrt geübt werden.

Auf der Handlungsebene kann die Lehrkraft Flüssigkeiten mit bekanntem Volumen (Vorgabe in cm^3) in entsprechende Hohlkörper füllen oder Aufgaben stellen, wie:

- Bei einem Würfel sind alle Kanten 3 cm lang. Welches Volumen hat er? Forme einen solchen Würfel aus Knetmasse.
- Ein Würfel hat ein Volumen von 8 cm^3 (64 cm^3 , 125 cm^3). Welche Kantenlänge hat er?
- Forme aus Knetmasse mit dem Volumen 8 cm^3 einen Würfel. Gib seine Kantenlänge an. Wie kann man durch Rechnung dieses Ergebnis überprüfen?
- Forme aus diesem Würfel einen anderen Quader. Welche Kantenlänge hat er?

Formale Aufgaben sind angezeigt, wenn die Schülerinnen und Schüler anschauliche Vorstellungen entwickelt haben, wie:

- Welches Volumen hat ein Quader, der 2 cm lang und breit und 2,5 cm hoch ist? Finde weitere Quader mit demselben Volumen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, haben bereits gute Vorstellungen vom Volumen entwickelt und sind in der Lage, die Volumenformel anzuwenden. Sie können Zusammenhänge zwischen Fest- und Hohlmaßen bearbeiten, mit verschiedenen Volumeneinheiten rechnen oder selbst Aufgaben zusammenstellen. Ihnen sind dementsprechend anspruchsvollere Aufgaben anzubieten, wie:

- Ergänze die Tabelle:

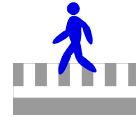
Kantenlänge a	Kantenlänge b	Kantenlänge c	Volumen V
4 cm	0,5 dm	105 mm	
15 cm	30 cm		9 Liter
		1,5 m	30 m^3

- Wie ändert sich das Volumen eines Quaders, wenn man eine (zwei, alle) Kantenlänge(n) halbiert (verdoppelt, verdreifacht)?
- Forme aus Knetmasse verschiedene Körper mit gleichem Volumen.
- Wie kann man das Volumen eines unregelmäßigen Körpers bestimmen? Informiere dich im Internet über die Differenzmethode. Zeige in einem einfachen Versuch, was du heraus gefunden hast. Es gibt eine Anekdote zur Entdeckung dieses Prinzips durch den Naturwissenschaftler Archimedes. Erzähle sie deinen Mitschülern.
- Wie oft passt eine Pyramide in einen Quader, der die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe hat? Überprüfe deine Vermutung in einem Experiment.
- Finde weitere Aufgaben zur Bestimmung des Volumens aus den Kantenlängen von Quadern und umgekehrt.

Aufgabe 8: Fußgängerüberweg

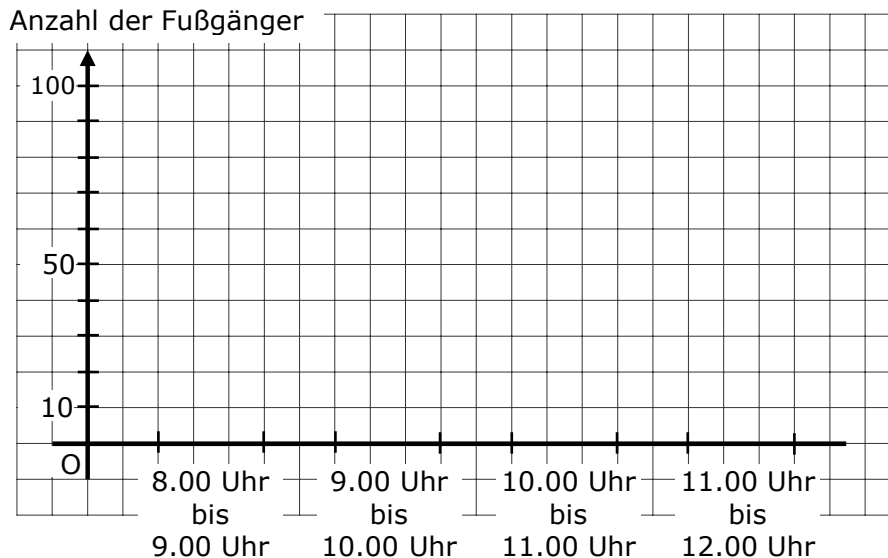
Aufgabe

Auf einem Fußgängerüberweg wurden an einem Vormittag die Fußgänger gezählt. Die Ergebnisse sind mit Hilfe von Symbolen dargestellt worden, wobei  für jeweils 10 Fußgänger steht.



8.00 bis 9.00 Uhr:	
9.00 bis 10.00 Uhr:	
10.00 bis 11.00 Uhr:	
11.00 bis 12.00 Uhr:	

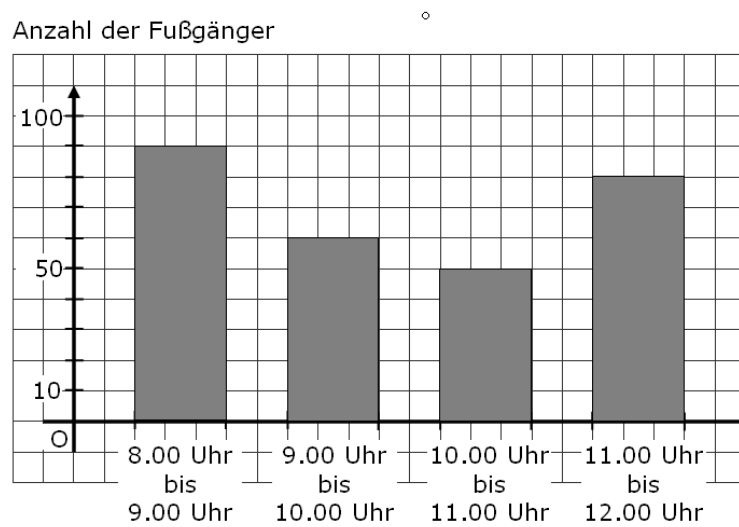
Stelle den Sachverhalt in einem Säulendiagramm dar.



Lösung

Richtige, vollständige Darstellung:

Die Breite, bzw. Füllung der Säulen wird in der Bewertung nicht berücksichtigt.



Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen einer graphischen Darstellung (Bildtdiagramm) die Ergebnisse einer statistischen Erhebung (K4). Dafür verwenden sie zusätzlich im Text vorgegebene Informationen (L5, K6). Mit diesen Ergebnissen wird ein Säulendiagramm in der Vorlage erstellt. Sie wechseln von einer Art der graphischen Darstellung zu einer anderen (K4, AB II).

Fehler treten auf, wenn Schülerinnen und Schüler nicht wissen, was ein Säulendiagramm ist, nicht beachten, dass das Symbol für 10 Fußgänger steht, sich ver zählen oder im Diagramm die vorgegebene Achseneinteilung nicht richtig nutzen.

Hinweise zur Weiterarbeit

An die Interessen und die Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler angelehnt, könnten im Unterricht viele Möglichkeiten für statistische Erhebungen genutzt werden. Zum Beispiel eignen sich Themen wie:

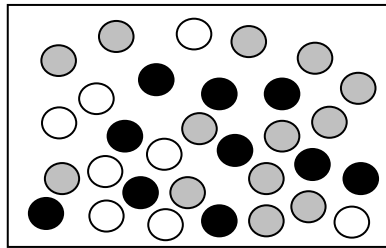
- Lieblingsfarbe,
- Themenkreis gesundes Frühstück,
- Verkehrsmittel für den Schulweg,
- Fernsehzeit,
- Zeiten für Computerspiele,
- Teilnahme an der Schulspeisung,
- Wasserverbrauch.

Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler lernen, beim Auszählen effektiv vorzugehen, z. B. sind Tabellen und Stichlisten zu empfehlen. Sie sollten verschiedene Möglichkeiten (Anfertigen von Tabellen, Säulendiagrammen, Steifendiagrammen, Kreisdiagrammen, Bildtdiagrammen) üben, die Ergebnisse statistischer Erhebungen darzustellen. Das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen verstärkt den Übungseffekt. Auch Beispiele von statistischen Erhebungen aus der Tagespresse, Zeitschriften, o. ä. könnten zum Entnehmen von Informationen genutzt werden.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten Auszählübungen durchgeführt, das Lesen von Bildtdiagrammen und das Zeichnen von Säulendiagrammen geübt werden.

Beispiele:

- Zähle aus, wie viele Punkte von jeder Farbe auf dem Bild zu sehen sind.
Fertige eine Strichliste an.

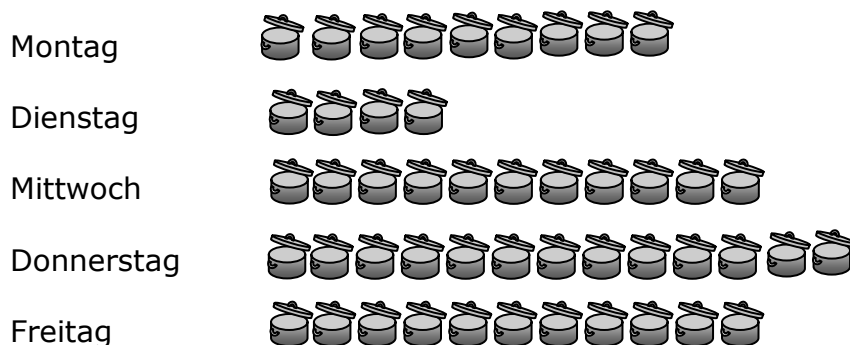


Farbe	Strichliste	Anzahl

- Das Diagramm zeigt die Teilnehmer am Schulessen unserer Schule.
Wie viele Teilnehmer am Schulessen waren es an den einzelnen Wochentagen?



= 5 Essen



Werden diese Tätigkeiten beherrscht, können die Schülerinnen und Schüler selbst Darstellungen anfertigen.

- Auf die Frage nach ihrer Lieblingsfarbe antworteten die Kinder:

Farbe	Anzahl der Kinder
Rot	250
Blau	300
Pink	200
Grün	150

- Stelle dieses Umfrageergebnis in einem Bilddiagramm dar.
Benutze: ☺ für jeweils 50 Kinder
- Fertige ein Säulendiagramm an.

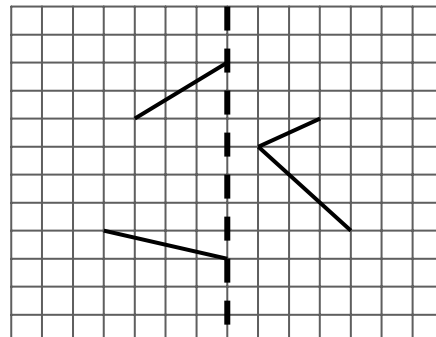
Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten sich mit komplexeren Datenerhebungen auseinandersetzen. Es könnten zu Umfragen (z. B. zur gesunden Ernährung), die in der Schule ausgeführt wurden, selbständig die ausgefüllten Fragebögen ausgezählt und anschließend diese Ergebnisse zur Veröffentlichung im Schulgebäude graphisch dargestellt werden.

Aufgabe 9: Achsensymmetrische Figur

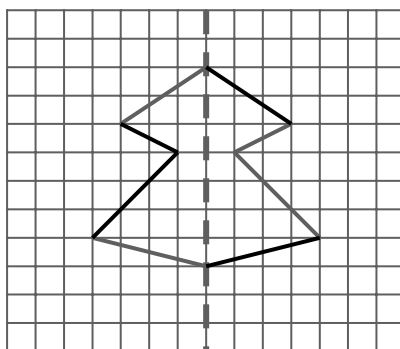
Aufgabe

Achsensymmetrische Figur

Vervollständige zu einer geschlossenen achsensymmetrischen Figur.
Die Spiegelachse ist gestrichelt eingezeichnet.
Zeichne nur so viele Strecken wie nötig.



Lösung



Zeichengenauigkeit: ± 1 mm

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form(L3)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zunächst ist die im Aufgabentext beschriebene Spiegelachse in der Zeichnung zu identifizieren und ihre Bedeutung hinsichtlich der Aufgabe zu rekapitulieren. Die eingetragenen Strecken können dann als Bestandteile der unvollständigen Figur erkannt werden (K4). Die fehlenden Strecken werden so eingezeichnet, dass sie der Symmetrie-Forderung entsprechen (L3, K5). Die Anweisung, nur so viele Strecken wie nötig zu zeichnen, ermöglicht die Eindeutigkeit der Lösung und zusätzlich die Kontrolle der eigenen Tätigkeit (Entstehung einer vollständigen Figur). Das Vorgehen zur Lösung ist mehrschrittig (AB II).

Zu erwartende **Fehler** sind in der Regel:

- Fehler in der Symmetrie, bedingt durch falsches Abzählen von Kästchen oder schiefes Anlegen des Konstruktions-Werkzeuges,

- Ungenauigkeiten in der Zeichnung, bedingt durch mangelnde Übung oder mangelnde Konzentration,
- Nichtbeachtung der Vollständigkeitsforderung, bedingt durch oberflächliches Verständnis des Aufgabentextes,
- Nichtbeachtung der Minimalforderung wegen mangelnder Strenge oder unzureichender Beachtung des Textes.

Grob falsche Zeichnungen deuten, ähnlich wie Nicht-Bearbeiten, eher auf fehlendes Verständnis für Achsensymmetrie oder auf ein grundlegendes Unverständnis der Aufgabenstellung hin.

Eine **Diagnose** der Ursachen wird außer bei offensichtlichen Abzählfehlern oder Ungenauigkeiten häufig erst deutlich, wenn Schülerinnen und Schüler sich zum Bearbeiten der Aufgabe äußern.

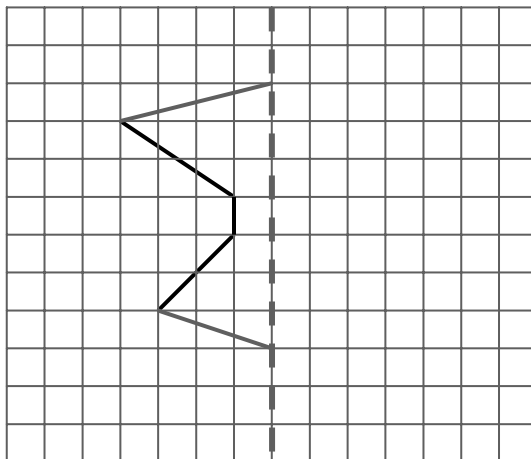
Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich je nach Problemlage verschiedene Übungen an.

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der korrekten bzw. präzisen Konstruktion hatten, können Konstruktionen an einfacheren Figuren üben, insbesondere an Figuren, die nur auf einer Seite der Symmetrieachse, dort aber vollständig vorgegeben werden.

Beispiel:

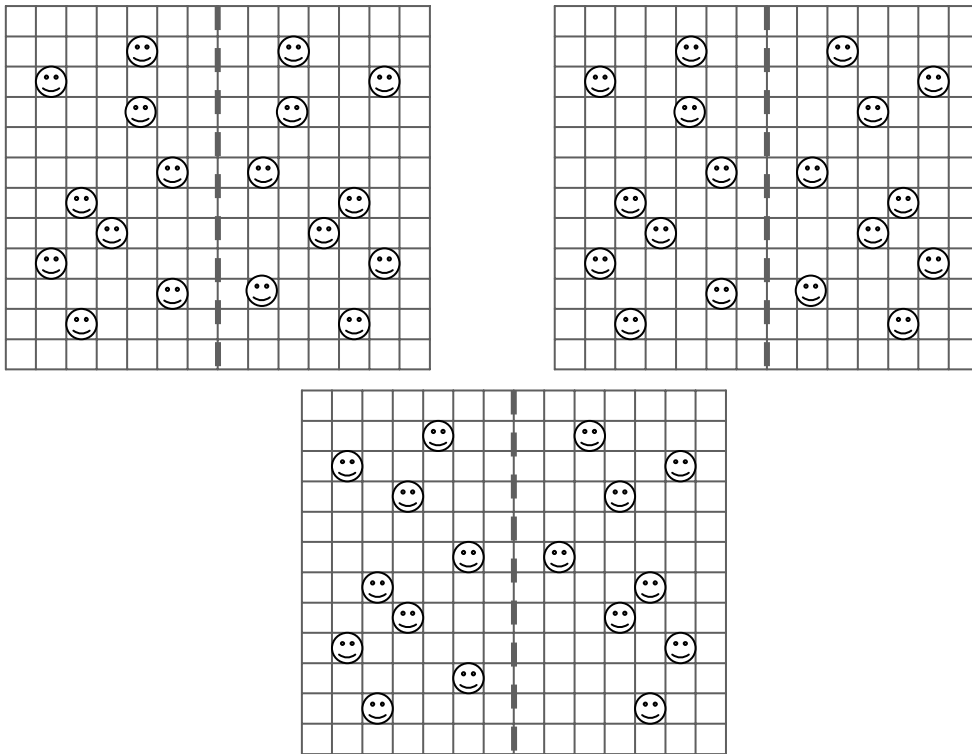
- Vervollständige zu einer achsensymmetrischen Figur. Die Spiegelachse ist gestrichelt dargestellt.



Bei derartigen Aufgaben spielt auch das Einhalten der Vollständigkeitsforderung eine Rolle. Unterstützend sind „Suchbild“-Aufgaben geeignet, die Konzentration auf Vollständigkeit zu trainieren und das Symmetrieverständnis zu stützen.

Beispiel:

- Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 6a hatten die Aufgabe, symmetrische Smiley-Muster zu zeichnen. Hier siehst du einige Ergebnisse. Die Symmetrieachse ist jeweils gestrichelt eingezeichnet. *Nicht alle* Zeichnungen sind richtig. Kreuze die Smileys an, die keinen Symmetriepartner haben.

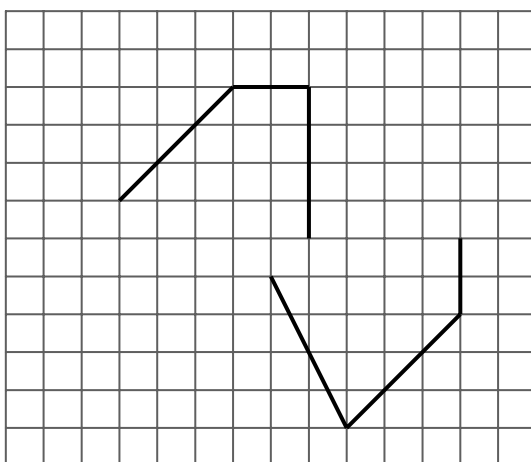


Weitere Varianten mit waagerechten oder diagonalen Symmetrieachsen bieten sich als schwierigere Aufgabentypen an.

Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können zur weiteren Förderung kompliziertere Figuren erhalten oder im Rahmen der **Differenzierung** auch noch mit dem Auffinden der Symmetrieachse oder dem Ausdenken eigener Aufgaben beauftragt werden.

Beispiel:

- Die gezeichneten Strecken sind Teile einer achsensymmetrischen Figur. Finde die Symmetrieachse und vervollständige die Figur so, dass du mit möglichst wenigen Strecken auskommst.



Mögliche Hilfe:
Probiere auch schräge
Symmetrieachsen aus.
oder:
Es gibt auch eine Lösung,
bei der du nur
zwei Strecken
ergänzen musst.

Aufgabe 10: Busfahrplan

Aufgabe

Steffi kommt am Dienstag um 14.37 Uhr an der Bushaltestelle an. Sie möchte bis zur Haltestelle „Waldsiedlung“ fahren und schaut auf den Fahrplan, von dem hier Teile abgebildet sind.

Abfahrtzeiten Richtung Waldsiedlung

montags bis freitags

13.05 13.15 13.25 13.35 13.45 13.55
14.05 14.15 14.35 14.55
15.15 15.35 15.55

samstags und sonntags

13.15 13.35 13.55
14.15 14.35
15.15 15.55

Fahrzeit

von hier bis

Meisenweg 2 min
Tannenstieg 4 min
Waldsiedlung 7 min

Um welche Uhrzeit wird Steffi laut Fahrplan an der Station „Waldsiedlung“ ankommen, wenn sie den nächsten Bus nimmt?

Steffi wird um _____ Uhr an der Station „Waldsiedlung“ ankommen.

Lösung

15:02 bzw. 15.02

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler der Sachsituation entsprechend aus einem Fahrplan Zeitangaben entnehmen (L2, K6). Für die Berechnung der gesuchten Zeit ist die zutreffende Abfahrtszeit um die Dauer der Fahrt zu erhöhen (K3, K5). Die Vorgehensweise ist mehrschrittig (AB II).

Als **Fehler** sind in der Regel falsches Entnehmen der Daten und eventuell auch Rechenfehler zu erwarten.

- Beim Entnehmen der Daten ist es möglich, dass die zutreffende Abfahrtszeit falsch gewählt wird, z. B. die am nächsten gelegene Zeit 14.35 Uhr, welche bei folgerichtiger Fortsetzung zur Ankunftszeit 14.42 Uhr führen würde.
- Ein oberflächliches Lesen der Fahrtzeitdauer, bei dem die Formulierung „ab hier“ unbeachtet bleibt, würde eine Summe der Fahrtzeiten von 13 min bewirken, mit dem Ergebnis 15.08 Uhr, bzw. 14.48 Uhr bei Kombination mit dem vorgenannten Fehler.
- Eine grob fehlerhafte Vereinfachung des Realmodells, in der statt der planmäßigen Abfahrtszeit die Ankunftszeit an der Haltestelle zu Grunde gelegt wird, würde bei folgerichtiger Fortsetzung zu dem Ergebnis 14.44 Uhr, bei dem genannten Fahrtzeiten-Irrtum zu dem Ergebnis 14.50 Uhr führen.
- Unter den Rechenfehlern würden Unsicherheiten im Umgang mit dem Stundenübergang z. B. an Zeitangaben wie 14.62 Uhr oder 14.02 Uhr deutlich werden können.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht bearbeitet haben, könnten auf die Idee gekommen sein, dass diese Aufgabe unlösbar sei, weil nur Teile des Fahrplans angegeben seien und man nicht wissen könne, ob es zwischen den aufgelisteten Fahrtzeiten noch weitere gebe. Eine Nachfrage bei den Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht bearbeitet haben, könnte diese Denkweise offenbaren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sind je nach Problemlage unterschiedliche Übungen sinnvoll:

- Falls sie am Ablesen aus der Tabelle gescheitert sind, bieten sich Übungen an dieser und ähnlichen Tabellen mit folgenden Fragestellungen an: „Wann kommt der nächste Bus?“, „Wie lange fährt der Bus bis zur Haltestelle ...?“

Um die Orientierung in einer unbekannten Tabelle zu trainieren, bietet sich auch eine Arbeit mit anders aufgebauten Tabellen an.

Beispiel:

- Die folgende Tabelle zeigt die Abfahrtszeiten einer Buslinie an den verschiedenen Haltestellen:

Schule	12.33	12.53	13.13	13.33	13.53	14.18	14.48	15.18
Spechtweg	12.37	12.57	13.17	13.37	13.57	14.22	14.52	15.22
Buchenstieg	12.39	12.59	13.19	13.39	13.59	14.24	14.54	15.24
Waldkehre	12.44	13.04	13.24	13.44	14.04	14.28	14.58	15.28

- a) Tanja trifft an der Haltestelle „Spechtweg“ um 13.59 Uhr ein. Wann kommt der nächste Bus in Richtung „Waldkehre“?

- b) Ronja trifft an der Haltestelle „Buchenstieg“ um 13.42 Uhr ein. Sie will zur Waldkehre gelangen. Zu Fuß würde sie höchstens 20 Minuten benötigen. Könnte sie mit dem Bus schneller ankommen? Begründe.
- c) Wie lange fährt der Bus von „Spechtweg“ zu „Waldkehre“? Fahren alle angegebenen Busse gleich lange?

Falls Berechnungen zur Zeitdauer mit geübt werden sollen, lassen sich Fragen formulieren wie z. B. „Wie viel Zeit braucht der Bus von ... bis ...?“

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können ihre Fähigkeiten an Hand realer regionaler Fahrpläne ausbauen, indem sie (fiktive) Ausflugsfahrten mit mehreren zu vergleichenden Verbindungen und Möglichkeiten zum Umsteigen planen.

Beispiel:

- Die Klasse 5c plant für einen Freitag einen Ausflug in den „Wildpark Schwarze Berge“. Der Wildpark ist nur mit dem Bus 340 zu erreichen, allerdings aus zwei Richtungen: aus der Richtung von Neugraben oder aus der Richtung von Harburg.

Die Klasse will von der Station „Bahnhof Altona“ zwischen 8.00 Uhr und 9.00 Uhr starten.

Nachfolgend sind Ausschnitte aus den Fahrplänen zu sehen. Mit welcher Verbindung hat sie die kürzeste Fahrzeit? Gib die Verbindung an.

Tipp: Markiere die wichtigen Haltestellen.

S3		Pinneberg – Altona – Jungfernstieg – Hauptbahnhof – Neugraben –									
Haltestellen mit Anschlusslinien		montags - freitags									
Altona		7.14	7.24	7.34	7.44	7.54	8.04	8.14			14.14
Königstraße		7.16	7.26	7.36	7.46	7.56	8.06	8.16	alle		14.16
Reeperbahn		7.18	7.28	7.38	7.48	7.58	8.08	8.18	10		14.18
Landungsbrücken		7.20	7.30	7.40	7.50	8.00	8.10	8.20	Min		14.20
Wilhelmsburg		7.36	7.46	7.56	8.06	8.16	8.26	8.36	alle		14.36
Harburg		7.41	7.51	8.01	8.11	8.21	8.31	8.41	10		14.41
Harburg Rathaus		7.43	7.53	8.03	8.13	8.23	8.33	8.43	Min		14.43
Heimfeld		7.45	7.55	8.05	8.15	8.25	8.35	8.45			14.45
Neuwiedenthal		7.50	8.00	8.10	8.20	8.30	8.40	8.50			14.50
Neugraben		7.53	8.03	8.13	8.23	8.33	8.43	8.53			14.53

340**Bf. Harburg – Museum Kiekeberg – S Neuwieder**

Haltestellen mit Anschlusslinien	montags - freitags									
S Bf. Harburg ab						8.28	9.33	10.33	11.33	12.33
Harburger Ring						8.31	9.36	10.36	11.36	12.36
Alvesen, Im Alvesener Dorfe				7.25		9.01				13.10
Ehestorf, Ehestorfer Heideweg	5.53	6.33	6.58	7.27	8.23				12.43	13.12
Wildpark Schwarze Berge						9.03	10.04	11.04	12.04	13.12
Ehestorf, Sniers Achterhoff						9.04	10.05	11.05	12.05	13.13

340**S Neugraben – S Neuwiedenthal – Mus**

Haltestellen mit Anschlusslinien	montags - freitags									
S Neugraben ab	0.28	6.14	6.38	6.56	7.25	7.55	8.18		9.18	10.18
Neuwiedenthaler Straße (West)	0.30	6.16	6.40	6.58	7.27	7.57	8.20		9.20	10.20
moorbürger Ring	0.34	6.20	6.44	7.02	7.31	8.01	8.24		9.24	10.24
Rehrstieg	0.35	6.21	6.46	7.04	7.33	8.03	8.26		9.26	10.26
S Neuwiedenthal	0.37	6.23	6.48	7.06	7.35	8.05	8.28	9.18	9.28	10.28
Opferberg	0.38	6.49	7.07	7.36	7.46	8.06	8.29	9.19	9.29	10.29
Talweg	0.38	6.50	7.08	7.37	7.47	8.07	8.30	9.20	9.30	10.30
Ehestorf, Schiemensteberg	0.43	6.55	7.15	7.42		8.12	8.35	9.25	9.35	10.35
Ehestorf, Emmetal	0.44	6.56	7.14	7.43		8.13	8.36	9.26	9.36	10.36
Ehestorf, Professor-Strache-Allee	0.44	6.57	7.15	7.44		8.14	8.37	9.27	9.37	10.37
Ehestorf, Harburger Stadtweg			7.16			8.15				
Ehestorf, Baddels Hoff	0.45	6.58		7.45		8.38	9.28	9.38	10.38	
Ehestorf, Sniers Achterhoff	0.46	6.59		7.46		8.39	9.29	9.39	10.39	
<u>Wildpark Schwarze Berge</u>						8.40	9.30	9.40	10.40	

250**Bf. Altona – Waltershof – S Neugraben – Fi**

Haltestellen mit Anschlusslinien	montags - freitags									
S Bf. Altona 	7.48	alle	11.48							
Bahrenfelder Straße	7.51	20	11.51							
Große Brunnenstraße	7.52	Min	11.52							
Rehrstieg	8.25		12.25							
S Neuwiedenthal	8.27		12.27							
Opferberg	8.28		12.28							
Francoper Straße	8.30		12.30							
S Neugraben 	8.32		12.32							

Aufgabe 11: Vereinsfarben

Aufgabe

Die Farben eines Vereins sind schwarz (s), weiß (w) und rot (r).
Wie können sich sechs Freunde einkleiden, wenn sie nur die Vereinsfarben tragen?

Die drei Kleidungsstücke (T-Shirt, Hose, Sockenpaar) sollen dabei jeweils eine andere Farbe haben. Jeder der Freunde soll sich von dem anderen unterscheiden.

Markiere die Kleidungsstücke entsprechend farbig oder schreibe die Farben hinein.



Lösung

z.B.:



Andere Reihenfolgen sind ebenfalls richtig, wenn alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen die erforderlichen Informationen dem Aufgabentext (K6). Sie können bei der Lösung konkret anschaulich oder mathematisch abstrakt vorgehen. Die Farbkombinationen der Kleidungsstücke können skizziert oder durch Symbole gekennzeichnet werden. Sie können auch eine Tabelle anfertigen und als Lösungsmodell verwenden (K3, K4). Das Lösen

dieser Aufgabe erfordert keine expliziten Erfahrungen aus dem Bereich der Kombinatorik, aber ein lexikografisches Vorgehen und Anordnen, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen (L1). Zum Lösen der Aufgabe sind mehrere Überlegungsschritte und eventuelles Probieren, nötig (AB II).

Hinweise zur Weiterarbeit

Kombinationen wie in dieser Aufgabenstellung werden bereits in der Grundschule genutzt, um an konkreten und anschaulichen Materialien eine Grundvorstellung für Anordnungen zu schulen.

Mit **Schülerinnen und Schülern, die beim Lösen der Aufgabe Schwierigkeiten hatten**, sollte zunächst ganz konkret anschaulich handelnd vorgegangen werden. Als Anschauungsmaterial können farbige Bausteine dienen. Dabei ist auf die Einhaltung einer Struktur und auf systematisches Vorgehen zu achten.

- Du hast 6 rote, 6 schwarze und 6 grüne Bausteine. Lege immer 3 verschiedenfarbige Bausteine so übereinander, dass 6 verschiedenfarbige Türme entstehen.

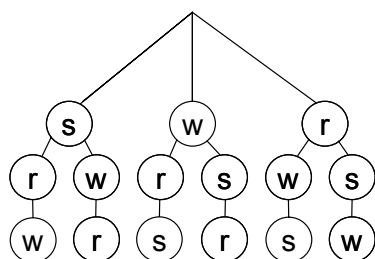
In Verbindung mit einfachen Arbeitsaufträgen können im Anschluss auch Kombinationen abstrakter Objekte betrachtet werden.

- Aus drei unterschiedlichen Ziffern (z. B.: 1, 2, 3) sollen alle möglichen zweistelligen Zahlen gebildet werden. Dabei darf jede Ziffer nur einmal in der Zahl vorkommen.

Zur **Differenzierung** können **Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten**, Varianten untersuchen, die eine größere Anzahl von Kombinationen zulassen (z. B. T-Shirts, Hosen, Strümpfe und Schuhe).

Modifikationen der Aufgabenstellung können hier durchaus zu abstrakten Beispielen (Kombinieren von Zahlen, Anordnung von Buchstaben, ...) führen. Es können auch Überlegungen angestellt werden, was das Weglassen bzw. Verändern der Bedingungen „Jedes Kleidungsstück (T-Shirt, Hose, Socken) soll dabei eine andere Farbe haben.“ bzw. „Jeder der Freunde soll sich von dem anderen unterscheiden.“ bewirkt.

In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, zur Verwendung unterschiedlicher mathematischer Darstellungsarten (wie Tabelle, Baumdiagramm) anzuregen.

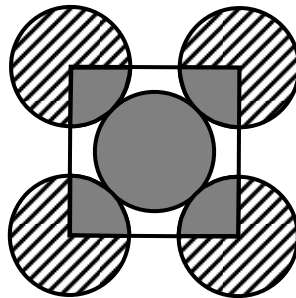


	s	w	r
s	x	✓	✓
w	✓	x	✓
r	✓	✓	x

Aufgabe 12: Kreise

Aufgabe

Die Abbildung zeigt fünf Kreise, die alle denselben Radius haben. Die vier äußeren Kreise berühren den inneren. Die Mittelpunkte der vier äußeren Kreise sind die Eckpunkte des Quadrats.



Wie groß ist das Verhältnis des Flächeninhalts der grauen Fläche zum Flächeninhalt der schraffierten Fläche?
Kreuze an.

- ☐ 1 : 4
- ☐ 2 : 3
- ☐ 2 : 5
- ☐ 5 : 4

Lösung

- ☐ 1 : 4
- ☒ 2 : 3
- ☐ 2 : 5
- ☐ 5 : 4

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen das Verhältnis der grauen zu den schraffierten Flächen der Kreise (L1). Dabei verwenden sie auch ihre Vorstellungen von Quadraten und Kreisen (L3) sowie von den Flächeninhalten der betrachteten Teilflächen (L2). Sie entwickeln eine Lösungsstrategie und übertragen das zeichnerisch dargestellte Problem in eine mathematische Sprache (K2). Sie entnehmen aus dem Text und der Grafik Informationen (K6, K4) und erkennen, dass zwei vollständige Kreise grauer Färbung entstehen und drei

vollständige Kreise mit schraffierter Fläche. Aus dieser Überlegung heraus entscheiden sie sich für das Verhältnis 2:3. Die Lösung dieser Aufgabe stellt die Schülerinnen und Schüler vor eine komplexe mathematische Situation, da kein Radius vorgegeben ist, müssen sie allgemeine Betrachtungen anstellen (AB III).

Zu erwartende **Fehler** sind:

- Die Schülerinnen und Schüler erfassen die Aufgabenstellung nicht.
- Die Schülerinnen und Schüler beachten nicht den Hinweis der gleichen Radien der Kreise und erkennen daher nicht die Flächengleichheit der fünf Kreise.
- Sie sind nicht in der Lage, zu erkennen, dass zwei vollständige graue Kreise und drei vollständige schraffierte Kreise entstehen.
- Die Schülerinnen und Schüler können das zeichnerische Problem nicht in mathematische Sprache übersetzen.
- Die Schülerinnen und Schüler können die Anzahl der unterschiedlich gefärbten Kreisflächen nicht in ein Verhältnis setzen.
- Die Schülerinnen und Schüler entscheiden sich für das Verhältnis
- 1:4, wenn sie nur die ganzen Kreise betrachten und Teilflächen außer Acht lassen,
2:5, wenn sie die grau gefärbten Flächen mit der Gesamtanzahl der Kreise vergleichen,
5:4, wenn sie die Anzahl der Kreise, die grau gefärbte Teile enthalten, mit der Anzahl der Kreise, die gestreifte Flächen enthalten, vergleichen.
Dabei stellen sie in allen drei Fällen keine konkreten Flächeninhaltsbetrachtungen an.

Zur **Diagnose** können Lösungsschritte im Unterricht genannt und diskutiert werden.

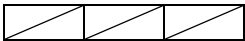
Hinweise zur Weiterarbeit

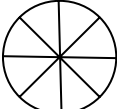
Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, können Flächenverhältnisse in vorgegebene Figuren einzeichnen oder zu gegebenen Verhältnissen eigene Figuren zeichnen.

Beispiele:

- Kennzeichne in den Figuren die folgenden Flächenverhältnisse, indem du verschiedene Farben verwendest:

1:4 

2:4 

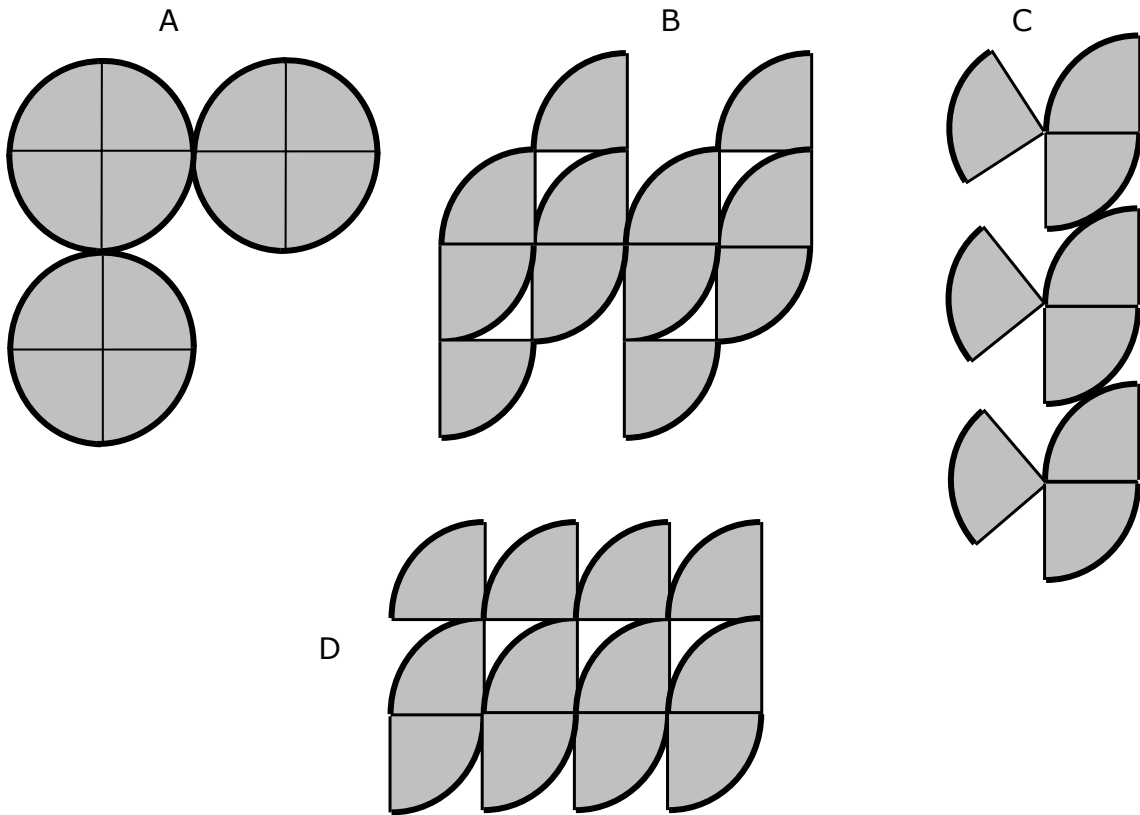
5:3 

- Gegeben ist ein Rechteck mit $a = 2 \text{ cm}$ und $b = 3 \text{ cm}$. Zeichne ein Rechteck mit einem doppelt so großem Umfang.

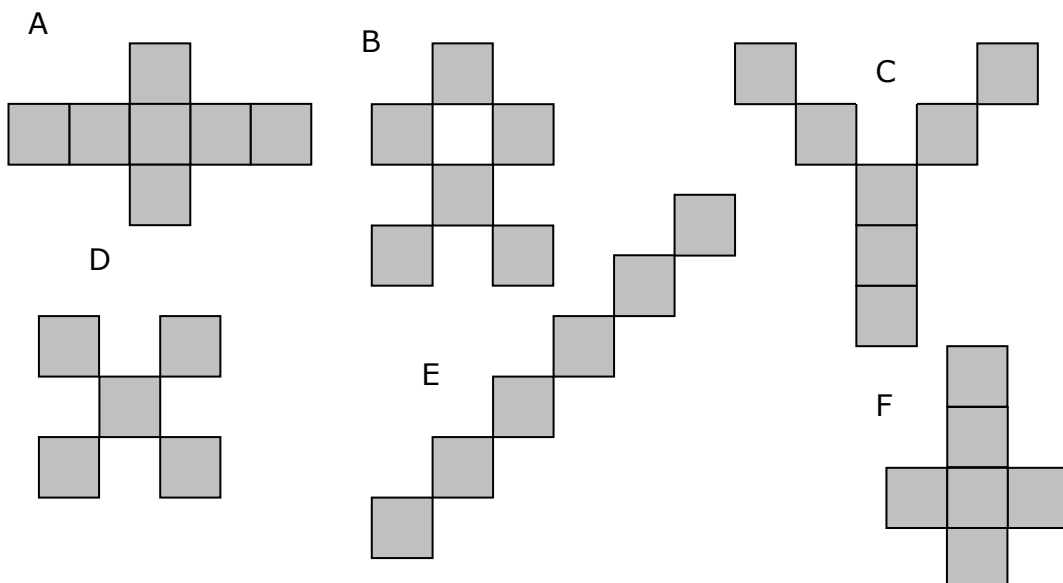
Die Schülerinnen und Schüler können passend zu diesem Item auch Aufgaben zur Zusammensetzung von verschiedenen flächengleichen Figuren bearbeiten.

Beispiele:

- Drei der Figuren A, B, C und D haben denselben Flächeninhalt. Schreibe sie auf:



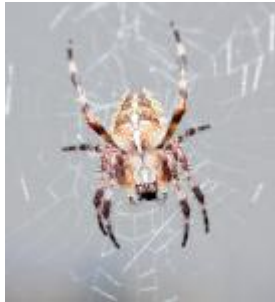
- Je zwei Figuren haben denselben Flächeninhalt. Ordne sie einander zu.



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können weiterführende Aufgaben zu Rechnungen mit Verhältnissen bearbeiten.

z. B.

- Vervollständige die Gleichungen.
a) $6 : 2 = 30 : ?$ b) $12 : ? = 36 : 9$ c) $? : 5 = 60 : 12$
- Der Schmetterling ist im Maßstab 1 : 3 dargestellt. Welche Flügelspannweite hat der Schmetterling in Wirklichkeit?
Die Spinne ist in Wirklichkeit (einschließlich Vorder- und Hinterbeine) 6 cm lang. In welchem Maßstab ist die Spinne dargestellt?
Der Spatz ist in Wirklichkeit 4-mal so groß wie in der Abbildung dargestellt. Bestimme die Körperhöhe in Wirklichkeit.



Bilder aus www.pixelio.de, Kategorie: Tiere

Aufgabe 13: Busfahrt

Aufgabe

Anja überlegt:

„An der Busfahrt zum Sportfest werden alle 32 Mitglieder meines Vereins teilnehmen. Wenn ich die Gesamtkosten für die Busfahrt gleichmäßig aufteile, muss jeder Teilnehmer 14 Euro bezahlen.“

Für die Busfahrt haben sich leider 4 Teilnehmer weniger angemeldet als Anja angenommen hat. Die Gesamtkosten für die Busfahrt bleiben aber gleich.

Wie viel Geld muss jetzt jeder Teilnehmer für die Busfahrt bezahlen?

Jeder Teilnehmer muss jetzt _____ Euro bezahlen.

Lösung

16

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen einen komplexen Sachverhalt erfassen und eine mehrschrittige Modellierung vornehmen (K3, AB II). Es handelt sich dabei um den quantitativen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Teilnehmer und den pro Teilnehmer anfallenden Kosten (L4). Zur Lösung ist es möglich, nur die Kostenerhöhung zu berechnen, die den verbleibenden 28 Teilnehmern durch die ausfallenden Einnahmen von $4 \cdot 14 \text{ €} = 56 \text{ €}$ entsteht. Diese Kostenerhöhung von 2 € muss anschließend zu den 14 € addiert werden, um die Kosten für jeden der 28 Teilnehmer zu erhalten. Alternativ können die gleichbleibenden Gesamtkosten von $32 \cdot 14 \text{ €} = 448 \text{ €}$ berechnet werden. Diese müssen dann noch durch die Rechnung $448 \text{ €} : 28 = 16 \text{ €}$ auf die 28 Teilnehmer verteilt werden. Bei beiden Lösungswegen kommen arithmetische Routineverfahren zur Anwendung (K5).

Fehler werden hauptsächlich bei der Übersetzung des beschriebenen Sachzusammenhangs in mathematische Relationen zu erwarten sein und bei der gegebenenfalls nötigen schriftlichen Multiplikation und Division auftreten.

Eine **Diagnose** der Fehler kann gegebenenfalls aus den schriftlich fixierten Teilen des Lösungsweges abgeleitet werden. Für eine weitergehende Diagnose ist es hilfreich, die Schülerlösungen im Unterricht darstellen und kommentieren zu lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, kann es hilfreich sein, ähnliche Sachverhalte erst einmal nur zu lesen und in mathematische Strukturen und Relationen zu übersetzen.

Eine explizite Lösung der Aufgaben sollte sich erst später anschließen.

- Lea möchte in ihrer Klasse Süßigkeiten austeilen, da sie Geburtstag hat. Sie packt für ihre 30 Mitschüler 60 kleine Riegel ein. Sie hat nicht bedacht, dass 10 (15) Mitschüler wegen einer Theaterprobe fehlen. Wie viele Riegel kann jeder Mitschüler bekommen?
- Ben liebt Anis Pastillen. Wenn er täglich 3 Pastillen isst, reicht eine Schachtel für 8 Tage. Wie lange reicht eine Schachtel, wenn er täglich 2 (4) Pastillen isst?
- Tim möchte mit seinen Freunden einen Ausflug machen. Er kauft das „Hessenticket“ der Bahn für 31 Euro. Mit dem „Hessenticket“ können bis zu 5 Personen einen Tag lang mit der Bahn fahren. Wie viel muss jeder Mitfahrer bezahlen, wenn 5 Personen (4 Personen) mitfahren?
- Meike hat sich nach der Schule mit 5 Freundinnen verabredet. Sie bringt 6 Flaschen Limonade mit, die jeweils 0,5 Liter Limonade enthalten. Unerwartet kommen 4 weitere Mädchen (2 Mädchen weniger) zu dem Treffen. Wie viel Limonade bekommt jedes Mädchen, wenn die Limonade gleichmäßig verteilt wird?

Ergänzend können Aufgabenstellungen, die nicht eindeutig sind oder einen anderen funktionalen Zusammenhang als die obigen Aufgabenbeispiele beinhalten, einer möglichen Automatisierung entgegenwirken, Diskussionen anregen und so helfen, Unterschiede in der Modellbildung herauszuarbeiten.

- Jan möchte im Sonderangebot 5 Schreibblöcke für 10 Euro kaufen. Im Geschäft entscheidet er sich um und kauft nur 3 Schreibblöcke. Wie viel muss er bezahlen?

Der Arbeitsauftrag, selbst ähnliche Aufgaben in anderen Sachzusammenhängen zu entwickeln, trägt zur Vertiefung der oben angesprochenen Kompetenzen bei (vgl. unten). Die Entscheidung, ob die schriftliche Multiplikation und Division noch einmal in der gesamten Lerngruppe thematisiert wird oder sich nur einzelne Schülerinnen und Schüler über Arbeitsblätter mit dieser Thematik beschäftigen, wird vom Testergebnis der Klasse abhängen.

Schülerinnen und Schüler, die mit der Lösung dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können mit der Bearbeitung von Aufgaben zu komplexeren Sachzusammenhängen beauftragt werden.

- Der Adorfer Skiclub plant eine Skifreizeit für 60 Personen. Die Kosten für die Skihütte und die Busreise betragen zusammen 4860 Euro. Nach einem Überschlag der Verpflegungskosten wird der Preis für Nichtmitglieder des Skiclubs auf 180 Euro festgesetzt. Die 36 Mitglieder des Skiclubs können einen Preis von 140 Euro erwarten, wenn alle 60 Plätze belegt sein werden.
 - a) Welche Kosten wurden für die Verpflegung einer Person veranschlagt?
 - b) Wie viel müssen die Vereinsmitglieder bezahlen, wenn nur 20 Nichtmitglieder mitfahren?

Alternativ können die Schülerinnen und Schüler mit entsprechenden Hinweisen neue Aufgaben entwickeln, wie z.B.:

- „Du sollst deine Aufgabe selbst lösen können.“ (eventuell mit dem Zusatz: ohne schriftliche Rechnung, ohne Taschenrechner)
- „Der Sachzusammenhang soll realistisch (aus deinem Erfahrungsbereich) sein.“
- „Der Sachzusammenhang soll ähnlich zu der Testaufgabe sein.“

Anschließend sollte thematisiert werden, inwiefern die entwickelten Aufgaben der Vorgabe der „Ähnlichkeit“ genügen.

Aufgabe 14: Wackelturm

Aufgabe



Zum Spiel „Wackelturm“ gehören 57 gleiche quaderförmige Bausteine mit den Maßen $1,0\text{ cm} \times 2,5\text{ cm} \times 7,5\text{ cm}$.

Angelika baut einen Turm, bei dem sich in jeder Schicht nur zwei Bausteine befinden. Alle Steine liegen auf der Seite mit dem größten Flächeninhalt.

Ein Baustein bleibt übrig.

Wie hoch wird dieser Turm?

Dieser Turm wird _____ cm hoch.

Lösung

28

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

- Die Schülerinnen und Schüler entnehmen aus dem Text die Maße für einen Baustein. Daraus ermitteln sie die Seite mit dem größten Flächeninhalt (L2) und erhalten die Höhe von einem Baustein in der vorgegebenen Lage. Mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Bausteine bestimmen sie, aus wie vielen Schichten der neue Turm bestehen muss. Sie multiplizieren die Anzahl der Schichten mit der Höhe eines Bausteins und erhalten die Höhe des Turmes (K5). Der Lösungsvorgang fordert die Modellierung aus Bild und Text in eine mathematische Sprache (K3). Die Rechnung ist mehrschrittig (AB II).

- Die Schülerinnen und Schüler können auch von der Abbildung des Turmes ausgehen. Sie erkennen, dass dort die Steine auf der Seite mit dem größten Flächeninhalt liegen und von jeder Schicht ein Stein entfernt werden muss. Mit den 19 entfernten Steinen werden oben auf dem Turm neun neue Schichten aus je zwei Bausteinen gebildet und ein Stein bleibt übrig (K3, AB II). Sie multiplizieren die Höhe eines Bausteins mit den 28 Schichten und erhalten die Höhe des Turms (K5).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe inhaltlich nicht verstehen und sich von der vorgegebenen Abbildung nicht lösen können, so dass ein Turm aus zwei Bausteinen pro Schicht gedanklich nicht gebaut wird. Ein weiterer Fehler könnte seine Ursache darin haben, dass die Seite mit dem größten Flächeninhalt nicht erkannt und somit eine falsche Höhe eines Steins ermittelt wird. Rechenfehler oder die Missachtung des weggelegten Steins führen ebenfalls dazu, dass die Schülerinnen und Schüler zu einem falschen Ergebnis kommen. Eine Höhe von 28,5 cm erhalten sie, wenn formal $57:2$ gerechnet wird. Bei der zweiten angegebenen Lösungsvariante können Zählfehler Ursachen für ein falsches Ergebnis sein. Es wäre auch möglich, dass die Schülerinnen und Schüler die Steine nur aus den Schichten entfernen und nicht wieder oben hinzufügen.

Zur detaillierten **Diagnose** können die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise im Unterricht erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten das Spiel Wackelturm spielen oder ganz einfach aus Bausteinen Türme mit verschiedenen Anzahlen von Bausteinen in einer Schicht bauen und jeweils die Höhe der Türme bei unterschiedlicher Lage der Bausteine ermitteln. Dabei könnten sie auch die Kantenlängen messen und den Flächeninhalt der größten Fläche berechnen.

Eine weitere Möglichkeit ist das Üben der Division mit und ohne Rest an sachverwandten Aufgabenstellungen, z. B.:

- Baue aus 34 Bausteinen einen Turm mit 4 Bausteinen pro Schicht. Wie viele Bausteine bleiben übrig?

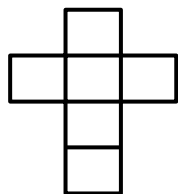
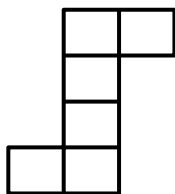
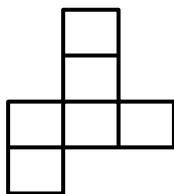
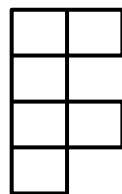
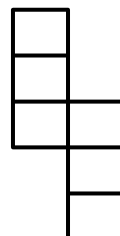
Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, könnten weitere sachgebundene Aufgaben zur Teilbarkeit mit und ohne Rest lösen, wie:

- Es sind 150 gleiche Steine vorhanden. Ein Turm soll gebaut werden,
 - a) bei dem in jeder Schicht gleich viele Steine liegen und alle Steine verwendet werden. Gib mehrere Möglichkeiten an.
 - b) bei dem in jeder Schicht gleich viele Steine liegen und 2 (3) Steine übrig bleiben. Gib mehrere Möglichkeiten an.
- Zum Spiel „Wackelturm“ gehören 57 gleiche quaderförmige Bausteine mit den Maßen 1,0 cm x 2,5 cm x 7,5 cm.
Wie hoch ist der höchstmögliche Turm, wenn er aus drei Steinen pro Schicht besteht und alle Steine die gleiche Lage haben?
Kann man solch einen Turm bauen? Begründe

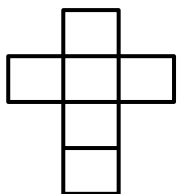
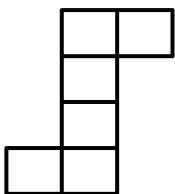
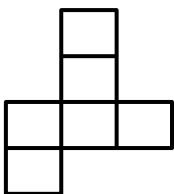
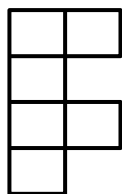
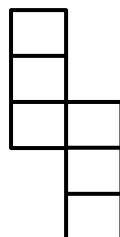
Aufgabe 15: Würfelnetz

Aufgabe

Welche Figur lässt sich **nicht** zu einem Würfel falten? Kreuze diese Figur an.


☐

☐

☐

☐

☐

Lösung


☐

☐

☐

☒

☐

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler benötigen räumliche Vorstellungen (L3). Sie kennen verschiedene Formen von Würfelnetzen oder operieren gedanklich mit den abgebildeten Abwicklungen, prüfen die Plausibilität der Antwortmöglichkeiten (K2) und entscheiden, ob sie sich zu einem Würfel falten lassen oder nicht (K4). Das Vorgehen zur Lösung ist mehrschrittig (AB II).

Fehler treten auf, wenn den Schülerinnen und Schülern die nötige Raumvorstellung fehlt, sie also nicht gedanklich die abgebildeten Figuren zu Würfelnetzen falten können. Die Vorgaben ermöglichen nicht, Varianten auszuschließen, die nicht aus sechs Quadraten bestehen. Eventuell erfassen die Schülerinnen und Schüler die Aufgabenstellung nicht und kreuzen alternativ alle Figuren an, die sich zu einem Würfel falten lassen.

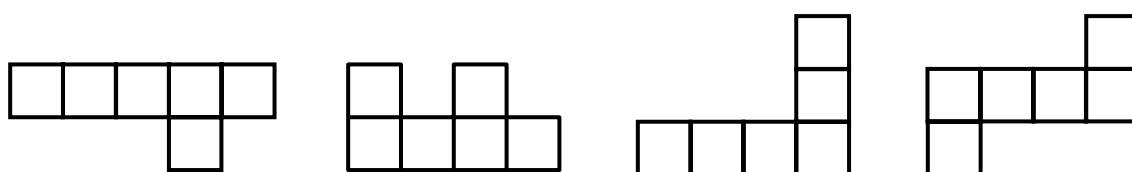
Die Schülerlösungen an sich erlauben keine **Diagnose** der Fehlerursache. Hilfreich wird es sein, wenn die Schülerinnen und Schüler im Unterricht angeregt werden, ihr Vorgehen zu erklären.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten mit losen Quadraten handelnd umgehen, indem sie vorgegebene Würfelnetze nachlegen oder ohne Vorlage selbst erarbeiten. Dabei kann ein systematisches Vorgehen vorteilhaft sein, bei dem beispielsweise immer wieder ein weiteres Quadrat an die schon vorhandene Figur angelegt und überprüft wird, ob ein neues Netz noch erreicht werden kann. Werden diese mit Klebeband verbunden, ergibt sich die Möglichkeit, die Würfelnetze zu falten, um so das gedankliche Operieren durch direkte Handlung zu unterstützen.

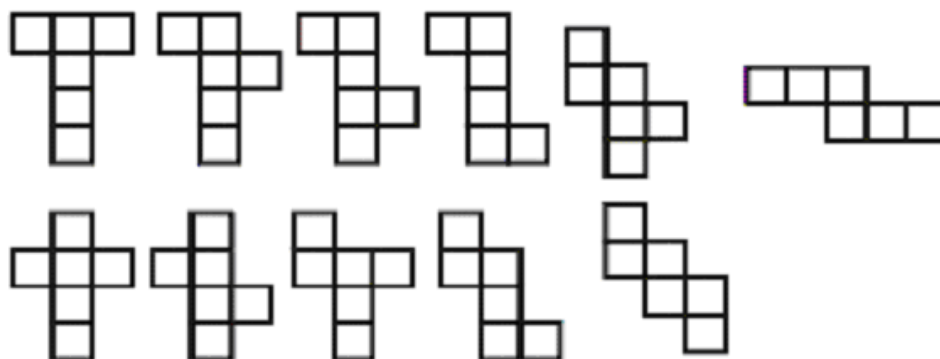
Die Aufgabenstellung kann danach auch umgekehrt werden, indem man fragt, welche Figur zu einem Würfelnetz gefaltet werden kann.

- Bei welchen Abbildungen handelt es sich um das Netz eines Würfels?



Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können erkunden, wie viele verschiedene Würfelnetze es gibt.

Ein weiterer Auftrag könnte sein, zu beschreiben, wie ein neues Würfelnetz aus einem vorangehenden durch Umlegen eines Quadrates entsteht.

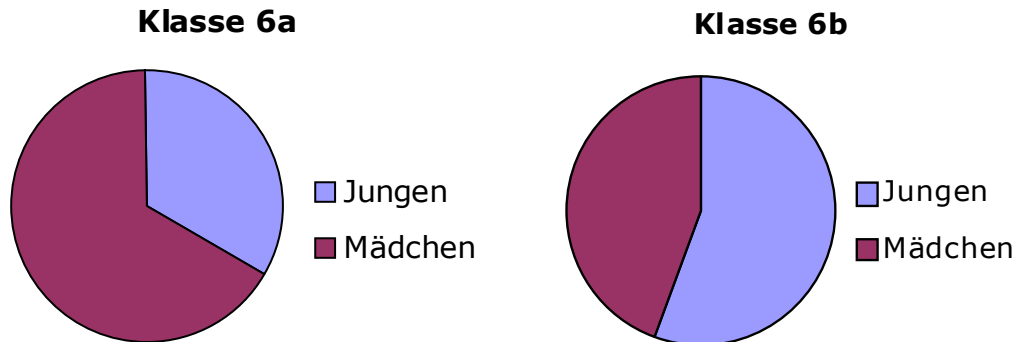


Zusätzlich kann man die Schülerinnen und Schüler anregen, Kriterien für „unmögliche“ Würfelnetze anzugeben.

Aufgabe 16: Zwei Klassen

Aufgabe

Die Zusammensetzung zweier Klassen ist in den folgenden Diagrammen dargestellt.



Ina möchte aus den Diagrammen ablesen, in welcher Klasse mehr Kinder sind. Welche Aussage ist richtig? Kreuze an.

- ☐ In der Klasse 6a sind mehr Kinder.
- ☐ In der Klasse 6b sind mehr Kinder.
- ☐ In beiden Klassen sind gleich viele Kinder.
- ☐ In der Klasse 6a sind 5 Kinder mehr.
- ☐ Das kann man aus den Diagrammen nicht ablesen.

Lösung

- ☐ In der Klasse 6a sind mehr Kinder.
- ☐ In der Klasse 6b sind mehr Kinder.
- ☐ In beiden Klassen sind gleich viele Kinder.
- ☐ In der Klasse 6a sind 5 Kinder mehr.
- ☒ Das kann man aus den Diagrammen nicht ablesen.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Interpretation der im Kreisdiagramm dargestellten Daten (L5) erfassen die Schülerinnen und Schüler den Sachverhalt der Darstellungen und beurteilen ihre Aussagekraft (K4).

Sie wissen, dass in einem Kreisdiagramm jeweils das Ganze dargestellt ist. Die absoluten Häufigkeiten sind dabei nicht genannt und daher nicht erkennbar. Die

Schülerinnen und Schüler kommen zu der Erkenntnis, dass die Frage nach der größeren Anzahl der Schüler in einer Klasse nicht beantwortet werden kann (K6), weil der Bezug zum konkreten Ganzen nicht möglich ist.

Die Bearbeitung der Aufgabe ist in AB II einzuordnen, da eine vertraute Darstellung gelesen und unter einem bestimmten Aspekt überprüft und bewertet werden muss.

Folgende Fehler sind zu erwarten:

- Die Schülerinnen und Schüler erfassen die Aufgabenstellung nicht.
- Sie wissen nicht, dass in den Kreisdiagrammen jeweils das Ganze dargestellt ist.
- Sie beachten die Legende nicht (keine Nennung von Anzahlen von Kindern).
- Sie legen gleiche absolute Häufigkeiten (Schüleranzahl der jeweiligen Klasse 6) zugrunde und interpretieren das Diagramm daher falsch.
- Für die Schülerinnen und Schüler scheidet die letzte Wahlmöglichkeit aus, weil sie zunächst davon ausgehen, dass jede Aufgabe lösbar ist.

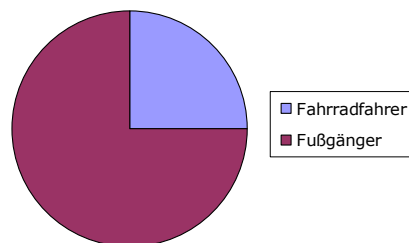
Zur **Diagnose** von Fehlleistungen sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Bearbeitungsstrategie erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten Kreisdiagramme zu ähnlichen Verteilungen besprochen werden (Lieblingsfach, Sportart usw.), z. B.:

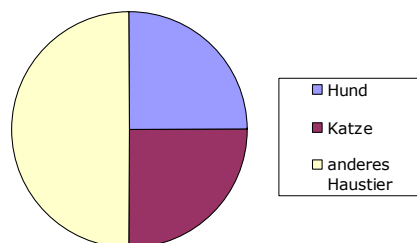
- Das Kreisdiagramm zeigt die Anteile der Kinder der Klasse 6a, die mit dem Fahrrad oder zu Fuß zur Schule kommen.

- a) Welche Informationen kannst du aus dem Diagramm entnehmen?
- b) In die Klasse gehen 20 (24, 28) Kinder. Wie viele Kinder kommen mit dem Fahrrad zur Schule?



- In der Klasse 6b wurden Schüler, die ein Haustier besitzen, befragt. Im Diagramm siehst du die Anteile der Schüler, die einen Hund, eine Katze oder ein anderes Haustier haben. Insgesamt haben 16 Kinder genau ein Haustier.

- a) Wie viele Kinder haben zu Hause einen Hund, wie viele eine Katze und wie viele ein anderes Haustier?
- b) Skizziere das Diagramm für 20 Kinder, die bei gleicher Verteilung genau ein Haustier besitzen.

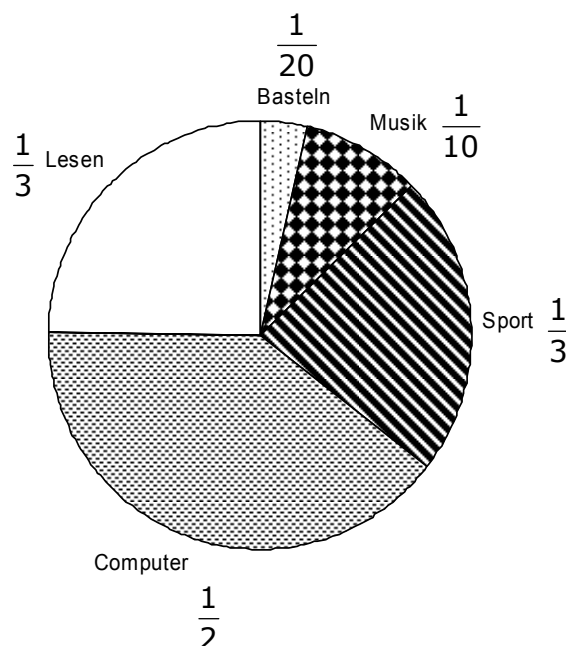


Es können sich Übungen anschließen, in denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig Anteile graphisch darstellen.

- Erstelle ein Diagramm zu folgenden Angaben:
In der Klasse 6c sind 28 Kinder sportlich aktiv. Sie gaben an, dass 14 Kinder Fußball spielen, 7 Kinder Handball spielen und 7 Kinder zum Schwimmen gehen. Kein Kind macht 2 Sportarten.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten folgende Beispielaufgaben bearbeiten:

- Von den 24 Schülerinnen und Schüler einer Klasse erhielten in der letzten Mathearbeit drei Kinder die Note Eins. Sechs Kinder bekamen eine Drei, ebenso viele eine Vier und $\frac{1}{8}$ der Klasse bekam die Note Fünf. Der Rest waren Zweien. Die Note Sechs wurde nicht erteilt.
 - a) Gib in Tabellenform an, wie viele Schüler jeweils welche Note bekamen.
 - b) Stelle den Sachverhalt in einem Kreisdiagramm dar.
- Unten siehst du eine Grafik, die in einer Schülerzeitung nach einer Umfrage zu den Hobbys der Schüler abgedruckt war. Mehrfachnennungen waren möglich.
 - a) Begründe, warum diese Darstellung mathematisch unkorrekt ist.
 - b) Überlege dir, wie man das Ergebnis der Umfrage anders darstellen müsste.
 - c) Fertige ein passendes Diagramm an.



Aufgabe 17: Erweitern

Aufgabe

Klaus soll die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$ berechnen.

Dazu will er den Bruch $\frac{1}{2}$ mit einer natürlichen Zahl so erweitern, dass er 9 als gemeinsamen Nenner bekommt.

Welchen Hinweis sollte man ihm geben? Kreuze an.

- ☐ Das geht nicht, weil 2 nicht durch 9 teilbar ist.
- ☐ Das geht nicht, weil 9 nicht durch 2 teilbar ist.
- ☐ Das geht nicht, weil 9 eine Primzahl ist.
- ☐ Das geht nicht, weil 2 eine Primzahl ist.
- ☐ Das geht, wenn man mit 7 erweitert.

Lösung

- ☐ Das geht nicht, weil 2 nicht durch 9 teilbar ist.
- ☒ Das geht nicht, weil 9 nicht durch 2 teilbar ist.
- ☐ Das geht nicht, weil 9 eine Primzahl ist.
- ☐ Das geht nicht, weil 2 eine Primzahl ist.
- ☐ Das geht, wenn man mit 7 erweitert.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematisch argumentieren (K1) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Diese Aufgabe testet die Sicherheit im Verständnis und in der Anwendung der Begriffe „Erweitern von Brüchen“, „gemeinsamer Nenner“ und „Primzahl“ (L1, K5) und die Fähigkeit, eine Vorgehensweise argumentativ zu stützen. Erschwerend wirkt sich hier die Negation aus (K1, AB II).

Mögliche **Fehler** ergeben sich auf zwei Ebenen: auf der algorithmischen sowie auf der argumentativen Metaebene.

Aus falsch angekreuzten Antworten ergeben sich Hinweise für eine **Diagnose**:

- Die erste angebotene Falsch-Antwort deutet auf eine Vertauschung der Reihenfolge beim Lesen und/oder mangelndes Verständnis der Teiler-Relation hin.
- Die nächsten beiden falschen Antworten operieren mit dem Begriff Primzahl. Als gemeinsamer Nenner müsste 9 auch 2 als Faktor enthalten. Da aber

2 nicht Teiler von 9 ist, könnte dies zur Assoziation Primzahl, also zur falschen Argumentation geführt haben.

- Analog kann die falsche Argumentation „2 ist Primzahl“ erklärt werden, wobei hierbei letztlich „9 ist nicht Teiler von 2“ entsteht.
- Die letzte Fehl-Antwort deutet auf grobe Unsicherheiten beim Anwenden des Erweiterns von Brüchen hin.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können gefördert werden, indem sie das Erweitern von Brüchen üben und hierbei unterstützend auch beschreiben.

Beispiele:

- Berechne $\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$ und beschreibe, wie du dabei vorgehst.
- Erweitere den Bruch $\frac{1}{2}$ nacheinander mit den Zahlen 2, 3, 4, 5, ..., 9.

	$\frac{1}{2}$ erweitert mit							
	2	3	4	5	6	7	8	9
ergibt								

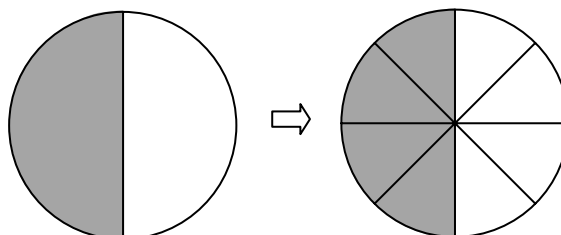
Welche Zahlen kommen als Nenner vor?

Was haben die Zahlen gemeinsam?

Warum kommt im Nenner keine 9 vor?

Begründe.

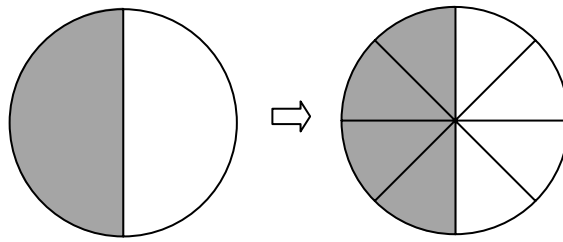
- Die Klasse hat eine Grafik erarbeitet, um das Erweitern von $\frac{1}{2}$ mit 4 zu veranschaulichen.



Mit Hilfe dieser Grafik soll ein Text zum Erklären des Erweiterns mit 4 geschrieben werden. Folgende Formulierungen werden vorgeschlagen. Kreuze an, welche Formulierungen zu der Erklärung beitragen können.

- ☐ Der Bruchteil $\frac{1}{2}$ ist in beiden Kreisen an der grauen Einfärbung erkennbar.
- ☐ Im rechten Kreis besteht die graue Hälfte aus 4 gleich großen Teilen.
- ☐ Die graue Hälfte ist im rechten Kreis viermal so groß wie im linken Kreis.
- ☐ Die Bilder zeigen: Wenn man Zähler und Nenner mit 4 multipliziert, ändert sich der Wert des Bruchs, weil es mehr Teile werden.
- ☐ Die Bilder zeigen, dass $\frac{1}{2}$ genauso viel ist wie $\frac{4}{8}$, weil die graue Fläche links und rechts gleich groß ist.

- Schreibe einen Text so, dass er in Verbindung mit der Abbildung eine Erklärung gibt, dass $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ist.



Mögliche Textbausteine:

In dem linken Kreis ist der Bruchteil ...

Der Bruchteil $\frac{4}{8}$ ist ... (dargestellt.)

Wenn man in dem linken Kreis beide Hälften ...

Im rechten Kreis hat daher jede Hälfte ...

Der ganze rechte Kreis hat daher ...

Jedes Teil des rechten Kreises hat die Größe von ...

Auch für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, können sich Formulierungsaufgaben als förderlich erweisen.

Beispiel:

- Stelle dir vor, eine Freundin oder ein Freund hat Schwierigkeiten in Mathematik. Du schreibst ihr oder ihm einen Brief, in dem du erklärst, wie das Erweitern eines Bruches funktioniert, und warum dabei der Wert des Bruchs erhalten bleibt. ...

Aufgabe 18: Gewichtige Rechnung

Aufgabe

Ergänze die Lücke, so dass die Rechnung stimmt.

$$450 \text{ g} \cdot \boxed{} = 450 \text{ kg}$$

Lösung

1000

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2)
Kompetenz:	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler vergleichen die gegebenen Massen (L2) und bestimmen den gesuchten Faktor (K5). Da die Maßzahlen gleich sind, kann die Aufgabe in einem einschrittigen Verfahren nur durch Vergleich der beiden Einheiten gelöst werden. Es ist aber zu erwarten, dass viele Schülerinnen und Schüler in einem Routineverfahren die Massenangaben auf die gleiche Einheit umrechnen, um dann den gesuchten Faktor durch einen Vergleich der Maßzahlen zu bestimmen. Da es sich bei dem gesuchten Faktor um eine Zehnerpotenz handelt, kann dieser Vergleich ohne explizite Rechnung durchgeführt werden (AB I).

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung dieser Aufgabe hatten**, kann es hilfreich sein, selbstständig die Massen verschiedener Gegenstände mit einer Tafelwaage zu bestimmen. Alternativ kann das Heben unterschiedlicher Wägestücke einen haptischen Zugang ermöglichen. Umrechnungen von Massen in kleinere und größere Einheiten können sich anschließen.

- Wandle in die angegebenen Einheiten um.

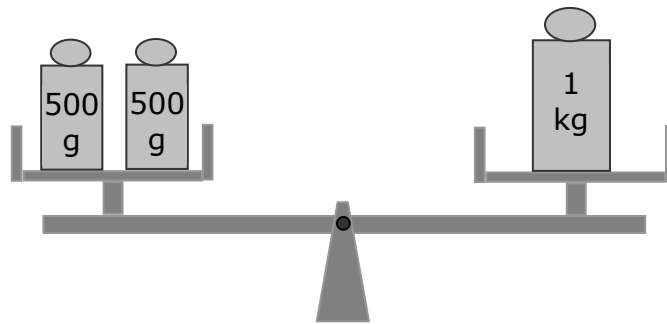
12 kg = g	23000 g = kg
340 kg = g	500 g = kg
7,5 kg = g	8400 g = kg
16,05 t = kg	1050 kg = kg

Das Vervielfachen von Massen sollte über Wiegesituationen und einfache Aufgaben wiederholt werden.

Beispiel:

$$2 \cdot 500 \text{ g} = 1 \text{ kg}$$

- Berechne.
 $2 \cdot 200 \text{ g} = ? \text{ kg}$
 $4 \cdot 750 \text{ g} = ? \text{ kg}$



Übungsaufgaben zum Vervielfachen und Teilen von Massen, gegebenenfalls mit einer verbalen Beschreibung des Lösungsweges, können folgen.

- Berechne

$$20 \text{ g} \cdot 100 = \boxed{} \text{ kg}$$

$$40 \text{ g} \cdot 500 = \boxed{} \text{ kg}$$

$$16 \text{ g} \cdot 1000 = \boxed{} \text{ kg}$$

$$2 \text{ kg} : 8 = \boxed{} \text{ g}$$

Sind die Routineverfahren eingeübt, kann zur Sicherung und Vertiefung die Komplexität der Aufgaben erhöht werden.

Schülerinnen und Schüler, die keine Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Testaufgabe hatten, können Varianten der Testaufgabe bearbeiten, die ein mehrschrittiges Vorgehen verlangen.

- Ergänze die Lücken so, dass die Rechnungen stimmen.

$$35 \text{ g} \cdot \boxed{} = 21 \text{ kg} \quad ; \quad 275 \text{ g} \cdot \boxed{} = 11 \text{ kg}$$

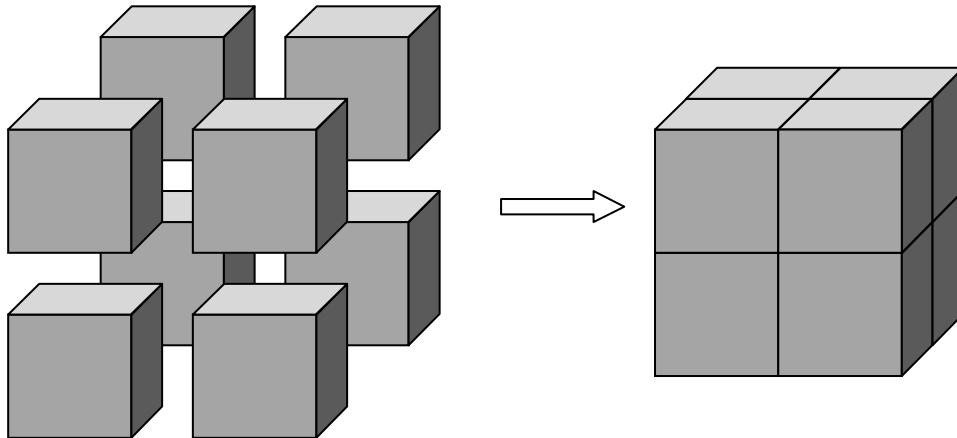
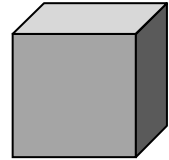
Darüber hinaus können diese Schülerinnen und Schüler beauftragt werden, Aufgaben für eine Übungssequenz oder ein Arbeitsblatt zu entwickeln.

Aufgabe 19: Würfel - Vergrößerungen

Aufgabe

Die Oberfläche eines Würfels besteht aus 6 Quadraten.

Wenn man 8 kleine Würfel gleicher Kantenlänge zusammensetzt, erhält man einen größeren Würfel.



Die Oberflächen der 8 kleinen Würfel bestehen zusammen aus 48 kleinen Quadraten.

Wie viele kleine Quadrate werden beim Zusammensetzen zum größeren Würfel verdeckt?

Es werden _____ kleine Quadrate verdeckt.

Lösung

24

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Messen (L2) Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

In dieser Aufgabe spielen sowohl die räumliche Vorstellung als auch das Erfassen der Größe einer Körperoberfläche eine Rolle (L3, L2). Zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage ist die Wahl einer Lösungsstrategie erforderlich (K2). Als Lösungsstrategien bieten sich ein systematisches Abzählen oder das Bestimmen eines Teils der Oberfläche mit anschließender Vervielfachung oder auch eine Differenzbildung zwischen den Anzahlen der außen liegenden Flächen vorher und nachher an. Die Abbildung illustriert die textlich beschriebene Situation und

unterstützt die Wahl und Kontrolle des Lösungsweges (K4). Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II).

Verschiedene **Fehler** sind zu erwarten:

- Die drei Berührungsebenen werden nur unvollständig berücksichtigt, so dass ein Ergebnis von 8 oder 16 genannt wird.
- Es wird übersehen, dass an der Berührung jeweils Paare von Quadratflächen beteiligt sind, so dass ein Ergebnis von 12 genannt wird.
- Es tritt eine Kombination beider Fehler ein, so dass ein Ergebnis von 4 oder 8 genannt wird.
- Die Bezugnahme auf kleine Würfelflächen findet nicht statt, so dass z. B. die Zahl 6 genannt wird.

Eine sichere **Diagnose** kann jedoch erst nach Befragen der Schülerinnen und Schüler möglich sein.

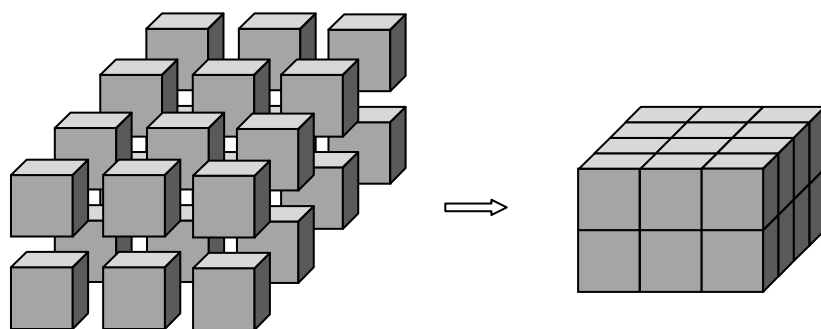
Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bietet sich ein gegenständliches Nachstellen der Aufgabe an, evtl. mit Kennzeichnung der betreffenden Flächen. Arbeitsauftrag könnte sein, die Lösungsüberlegungen in Worte zu fassen. Auch Verständnisfragen können zu einer tiefer gehenden Beschäftigung mit der Problemsituation beitragen, z. B. „Warum muss die Lösungszahl gerade, warum muss sie auch durch 3 teilbar sein?“

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, können Verallgemeinerungen versucht werden, z. B. auf Würfel, die aus n^3 kleinen Würfeln zusammengesetzt sind oder auf Quader, wobei ein Lösungsterm nur für konkrete Zahlen aufzustellen und ansonsten eher eine Beschreibung des Rechenweges anzustreben wäre.

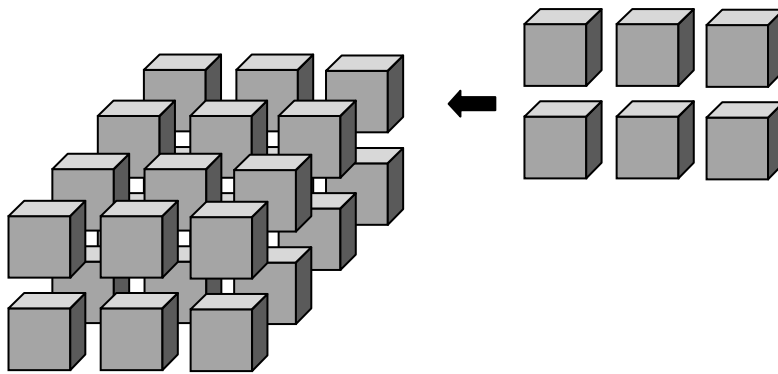
Beispiel:

- Aus 24 kleinen Würfeln wird ein $2 \times 3 \times 4$ - Quader zusammengesetzt.



Wie kannst du die Anzahl der kleinen verdeckten Quadrate berechnen?
Beschreibe deinen Rechenweg.

- Nun wird der $2 \times 3 \times 4$ - Quader um eine 2×3 - Schicht vergrößert.



Wie viele verdeckte kleine Quadrate kommen dadurch hinzu?
 Wie kannst du die gesamte Anzahl der verdeckten kleinen Quadrate
 ausrechnen, wenn der Quader aus n hintereinander gesetzten
 2×3 - Schichten besteht?

Aufgabe 20: Bruchrechnung

Aufgabe

Berechne.

$$\frac{8}{41} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{0}{20}$$

Lösung

0

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler wenden die Rechenregel zur Multiplikation gebrochener Zahlen an. Die Multiplikation mit Null stellt ein Routineverfahren dar, das aus dem Bereich der natürlichen Zahlen übertragen wurde (K5, L1, AB I).

Fehler können darin begründet sein, dass die Schülerinnen und Schüler die Null im Zähler des dritten Bruches als Faktor nicht erkennen und sich beim anschließenden mehrschrittigen Verfahren der Multiplikation von Brüchen verrechnen. Es ist auch denkbar, dass einige Schülerinnen und Schüler bei der Multiplikation fälschlicherweise die Regeln für die Addition anwenden. Wird kein Rechenweg notiert, sollten die Schülerinnen und Schüler zur **Diagnose** von Fehlern aufgefordert werden, ihre Lösungswege zu beschreiben und zu begründen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, kann die Multiplikation von natürlichen und gebrochenen Zahlen wiederholt und dabei besonders auf die Bedeutung der Zahlen 0 und 1 eingegangen werden. Die Lösung von Aufgaben zur Multiplikation von natürlichen Zahlen oder von gebrochenen Zahlen mit Null sollten sich anschließen.

- Welche Zahl kann für n eingesetzt werden, damit die Gleichung
 - a) $56 \cdot n = 0$ richtig ist?
 - b) $17 \cdot n = 17$ richtig ist?
- Berechne:
 - $13 \cdot 0 =$ $49 \cdot 1 =$
 - $0 \cdot 145 =$ $1 \cdot 23 =$

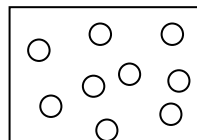
- Berechne: $\frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2} = ?$; $\frac{0}{3} \cdot \frac{2}{3} = ?$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{3} \cdot \frac{2}{5} = ?$

Falls die Grundvorstellungen zu Brüchen nicht tragfähig genug sind, um einen richtigen Lösungsansatz zu finden, kann es hilfreich sein, wenn Anteile verglichen, dargestellt oder markiert werden. Auf die Bedeutung des Zählers kann hier besonders eingegangen werden.

- Vergleiche und begründe: $\frac{0}{100}$; $\frac{0}{2}$; $\frac{0}{523}$

- Markiere $\frac{2}{9}$ ($\frac{5}{9}$; $\frac{2}{3}$) der Kreise.

Wie könntest du $\frac{0}{9}$ markieren?



Schülerinnen und Schüler, die mit der Lösung dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können den Arbeitsauftrag erhalten, Aufgaben mit Verknüpfungen verschiedener Rechenoperationen zur Multiplikation mit 0 oder 1 zu bearbeiten oder selbst zu entwickeln.

- $\left(\frac{9}{16} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{0}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)$

Darüber hinaus kann die Division mit Null und die Bedeutung der Null im Nenner eines Bruches wiederholt oder erarbeitet werden. Die Ergebnisse können anschließend der ganzen Lerngruppe präsentiert werden.

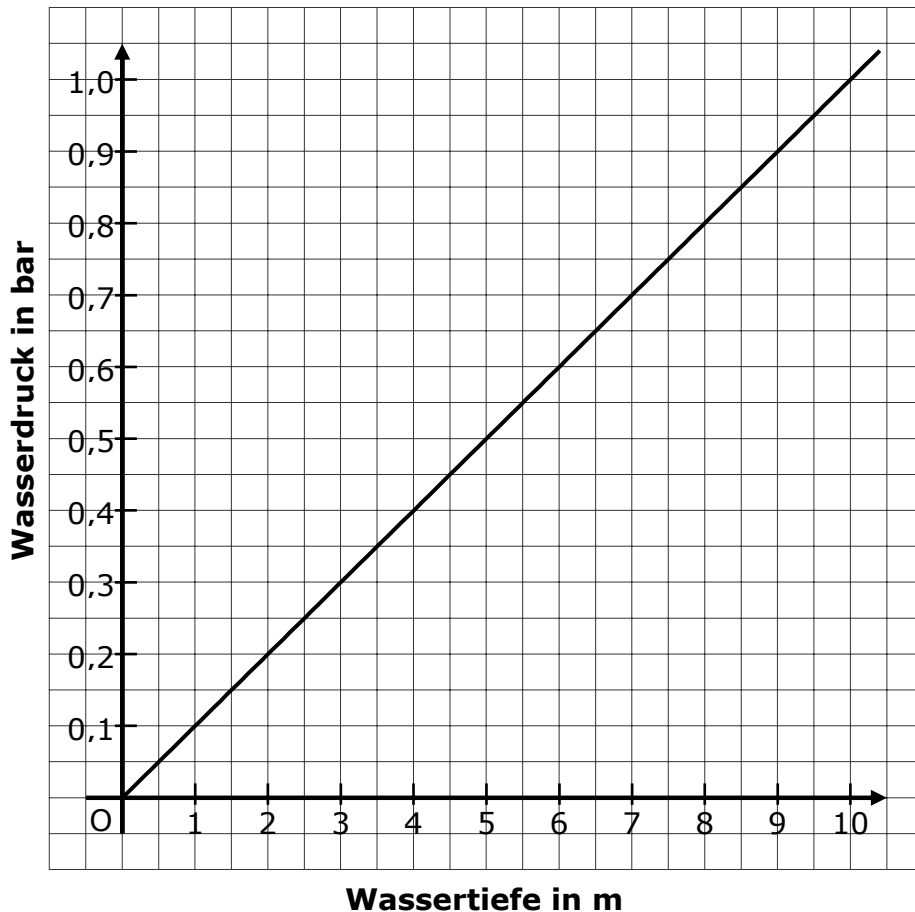
Aufgabe 21: Wasserdruck

Aufgabe

Der Wasserdruck nimmt mit zunehmender Tiefe zu.

Er wird in der Maßeinheit bar angegeben.

Der Zusammenhang zwischen Wasserdruck und Tiefe ist in folgendem Diagramm dargestellt.



- a) In welcher Tiefe beträgt der Wasserdruck 0,6 bar?

In einer Tiefe von _____ m beträgt der Wasserdruck 0,6 bar.

- b) Vervollständige den folgenden Satz.

Wenn sich die Tiefe verdreifacht, dann _____ sich der Wasserdruck.

Lösung 21a

6

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die gefragte Tiefe kann durch Ablesen aus der graphischen Darstellung bestimmt werden (L5, K4). Der zugrunde liegende Zusammenhang ist proportional. Die Schülerinnen und Schüler nutzen die ihnen vertraute Darstellung im Diagramm (AB I).

Folgende **Fehler** können auftreten:

- Nach dem korrekten Ablesen werden durch Flüchtigkeit die Zahlenwerte des geordneten Paares verwechselt, so dass als Lösung 0,6 m notiert wird.
- Es wird ein Wert für die Tiefe geraten.
- Der Wert für die Tiefe wird falsch abgelesen.

Die zugrunde liegenden Probleme können auf zwei Niveaus vorliegen, wobei eine **Diagnose** lediglich mit den Testheft-Lösungen der Schülerinnen und Schüler nicht möglich ist.

Im Fall von grundlegenden Problemen im Umgang mit Diagrammen finden die Schülerinnen und Schüler keinen Ansatz und können daher keine Daten entnehmen.

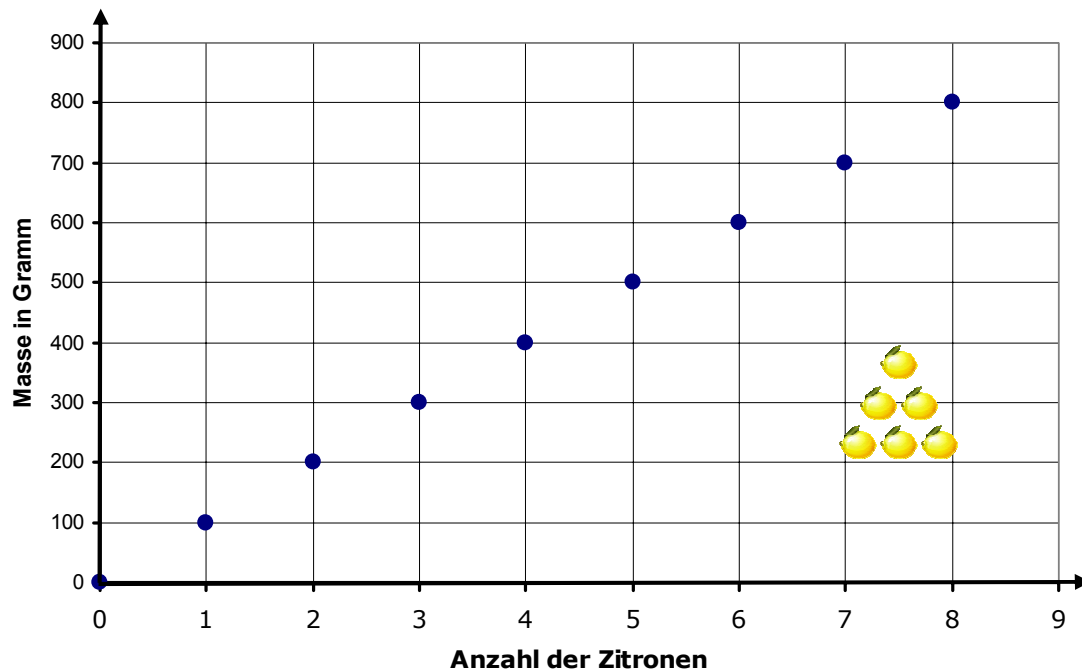
Können die Schülerinnen und Schüler grundsätzlich mit Diagrammen umgehen, kann ein Problem darin bestehen, dass ausgehend von einem Wert der Ordinate der zugeordnete Wert auf der Abszisse bestimmt werden muss, was zunächst eine Orientierung erfordert und ein eher ungewohntes Format darstellen kann.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe hatten, können sich mit den folgenden Aufgaben beschäftigen. Der Sachzusammenhang in diesen Aufgaben ist vertrauter als der Zusammenhang von Wasserdruck und Tiefe und bietet dadurch einen einfacheren Zugang.

Die erste Teilaufgabe erfordert die Zuordnung eines Ordinatenwertes, stellt also die vertrauteste Möglichkeit der Entnahme von Daten dar. Die zweite Teilaufgabe erfordert die Zuordnung eines Abszissenwertes. Hierfür muss sich erst ein Überblick über das Diagramm verschafft werden, um erkennen zu können, wo die gegebene und wo die gesuchte Informationen zu finden ist.

- Folgendes Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen der Anzahl und der Masse bei Zitronen. (Es wird hierbei davon ausgegangen, dass alle Zitronen gleich schwer sind)



- Wie schwer ist eine (drei, ...) Zitrone(n)?
- Für ein Blech mit Zitronenkuchen werden 600 g Zitronen benötigt. Wie viele Zitronen müssen gekauft werden?

Durch den Sachzusammenhang ist es möglich, die Schülerinnen und Schüler handeln zu lassen und mit echten Zitronen zu experimentieren:

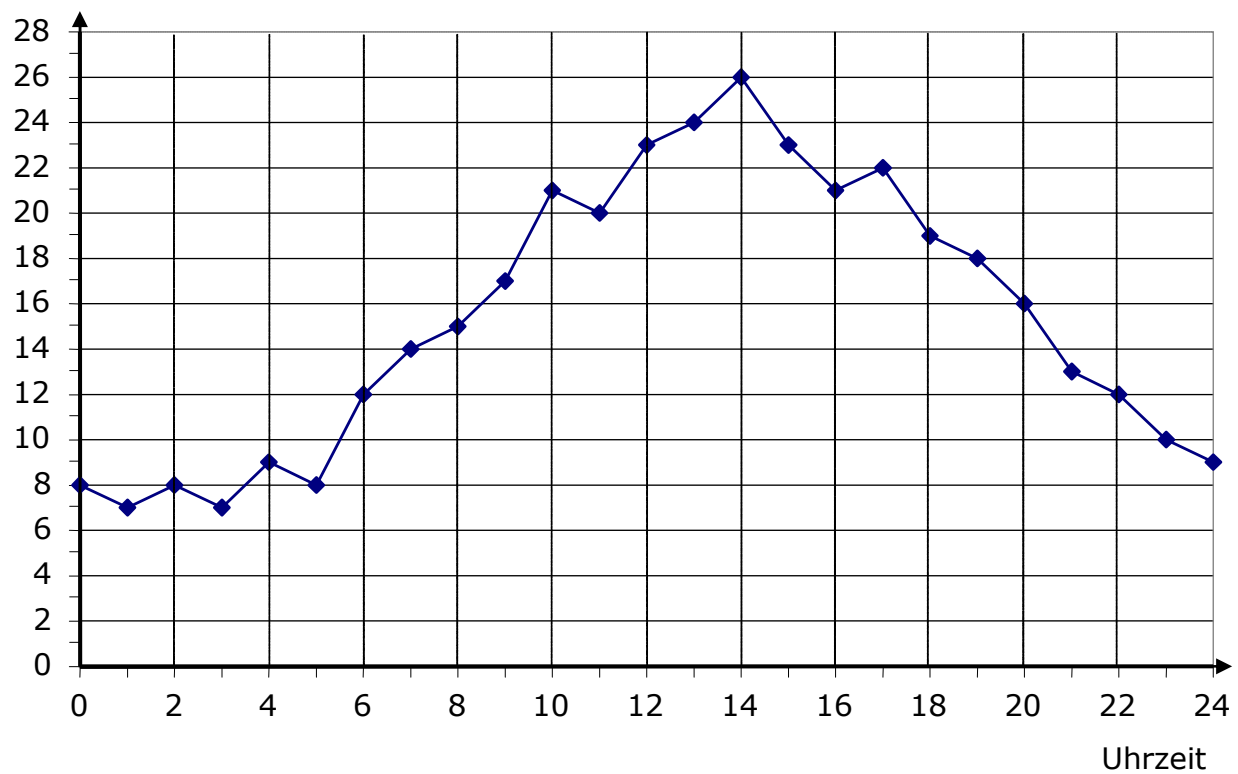
- Wie viel wiegt eine bestimmte Portion?
- Wie viel wird benötigt, um eine bestimmte Masse zu erhalten?

So kann zum einen der grundsätzliche Umgang mit Diagrammen geübt werden, zum anderen aber auch der Aspekt herausgearbeitet werden, dass ein solches Diagramm entweder von den Abszissenwerten zu den Ordinatenwerten oder umgekehrt gelesen werden kann.

Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können mit komplexeren Ableser-Aufgaben gefordert werden.

- In einer Wetterstation wurde einen Tag lang stündlich die Temperatur gemessen und als „Temperaturkurve“ aufgezeichnet.

Temperatur in °C



- Um welche Uhrzeit war die Temperatur am höchsten/niedrigsten?
Gib die Temperaturen und Uhrzeiten an.
- Zu welchen Uhrzeiten wurde eine Temperatur von 12 °C gemessen?

Lösung 21b

verdreifacht

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Für die Bearbeitung der Aufgabe müssen zunächst die notwendigen Informationen aus dem Diagramm entnommen werden (K4). Das erkennbare Realmodell muss in das entsprechende mathematische Modell des proportionalen Zusammenhangs überführt werden (K3, L4). Das Vorgehen ist mehrschrittig (AB II).

Bei der Bearbeitung können folgende **Fehler** auftreten:

- Aufgrund des fehlenden Verständnisses von Diagrammen werden falsche Informationen entnommen.
- Der Begriff „verdreifacht“ wird als „3 addieren“ falsch interpretiert.
- Da das Konzept der Proportionalität noch nicht vorhanden ist, werden die Schülerinnen und Schüler, sofern der Zusammenhang nicht intuitiv erfasst wird, Wertepaare bestimmen und aus diesen den Zusammenhang ableiten. Hierbei können Rechenfehler unterlaufen oder der Zusammenhang nicht erkannt werden.

Eine **Diagnose** ist aufgrund der reinen Lösungsangabe im Testheft wahrscheinlich nicht möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollten ihre Überlegungen im Unterricht verbalisieren.

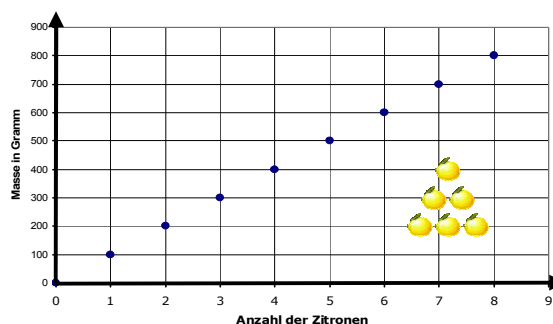
Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe hatten, können mit einer Aufgabe, deren Sachzusammenhang gegenständlicher ist, an proportionale Zusammenhänge herangeführt werden (vgl. Kommentar zur Aufgabe Wasserdruck, Teil a).

- Darian soll für seine Mutter 2 Zitronen kaufen. Im Supermarkt werden aber nur Netze mit 6 Zitronen angeboten. Das Wievielfache an Zitronen muss Darian nun kaufen wenn er ein Netz mit 6 Zitronen kauft?



- Wenn Darian statt zwei Zitronen sechs Zitronen kauft, wie viel mal mehr wiegen die Zitronen dann? (Beantworte die Frage mit Hilfe des Diagramms aus Aufgabe a)



Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können durch komplexere Modellierungsaufgaben gefordert werden, wie in /3/ Kommentierungsheft zum Haupttest 2009, Heft C, Aufgabe 12.

Bei der Bearbeitung sollten u. a. auch die Grenzen des Modells der Proportionalität in bestimmten Sachzusammenhängen thematisiert werden.

- Lisa möchte im Garten Sonnenblumen aus Samen selber ziehen. Sie hat schon Erfahrung und rechnet fest damit, dass acht von zehn Samen keimen.

Wie viele Samen muss Lisa nach ihrer Erfahrung mindestens säen, damit sie 20 Sonnenblumen erhält?



Aufgabe 22: Seillänge

Aufgabe

Jonas erzählt:

"Ich habe ein langes Seil gefunden und es in der Mitte durchgeschnitten. Die eine Hälfte habe ich weggelegt. Vom Rest habe ich ein Drittel abgeschnitten. Dieses Drittel war genau 4 m lang."

Wie lang war das Seil? Begründe.

Das Seil war _____ m lang.

Begründung:

Lösung

Richtiges Ergebnis **und** richtige, vollständige Begründung

Ergebnis: 24

Begründung:

z.B.: (1) $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$

Wenn $\frac{1}{3}$ der Hälfte 4 m lang ist, war das gesamte Seil

$4 \text{ m} \cdot 6 = 24 \text{ m lang.}$

- (2) Das Seil ist 24 m lang.
Die Hälfte des Seils ist 12 m lang.
Ein Drittel davon ist 4 m lang.



- (4) ...

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erfassen die Formulierungen „Mitte“, „Hälfte“ und „vom Rest ... ein Drittel“ und erstellen daraus ein mathematisches Modell der gegebenen Realsituation (L1, K3).

Die geforderte Argumentation (K1) ist für Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe komplex (AB III) und kann auf unterschiedliche Arten erfolgen.

- Ein Drittel von der Hälfte ist ein Sechstel vom Ganzen. Wenn ein Sechstel vom Ganzen 4 m entspricht, dann ergibt sich das Ganze als $6 \cdot 4 \text{ m} = 24 \text{ m}$ (K5).
- Ein Drittel von der Hälfte entspricht 4 m. Folglich ist ein Drittel vom Ganzen 8 m und das Ganze $3 \cdot 8 \text{ m} = 24 \text{ m}$ (K5).
- Ein Drittel von einem Halben ist 4 m, das Halbe demnach $3 \cdot 4 \text{ m} = 12 \text{ m}$ und das Ganze $2 \cdot 12 \text{ m} = 24 \text{ m}$ (K5).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler keine passende Bearbeitungsstrategie für diese Aufgabe finden. Weitere Fehler können ihre Ursache in Schwierigkeiten beim Erfassen des Aufgabentextes oder im Fehlen Sinn tragender Vorstellungen von gebrochenen Zahlen haben. Geben Schülerinnen und Schüler als Ergebnis 12 m an, so deutet das darauf hin, dass sie in ihrer Rechnung nur die Hälfte des Seiles berücksichtigten.

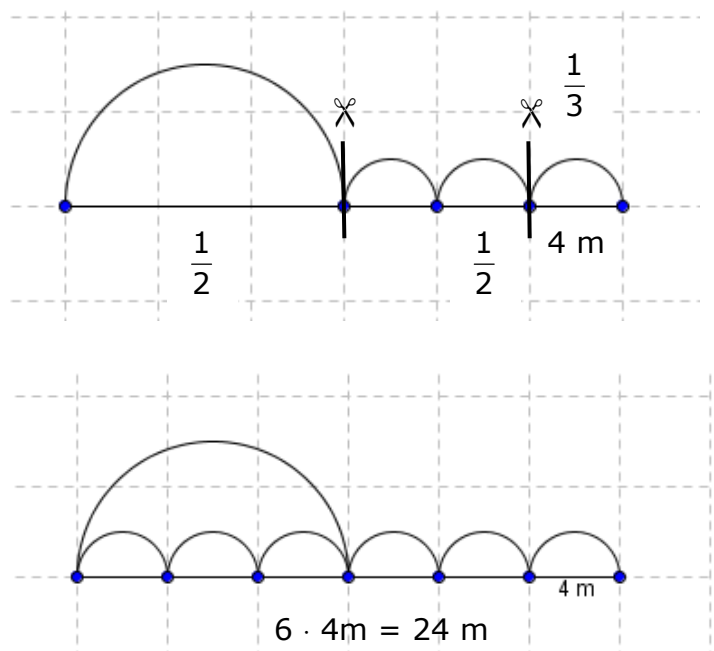
Für eine **Diagnose** ist die Auswertung der Schülernotizen im Testheft hilfreich. Auftretende Fehler können auch im Unterricht besprochen werden, nachdem die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsversuche dargelegt haben.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten Hilfen angeboten werden, wie man bei der Analyse derartiger Sachverhalte vorgehen kann. Zur Unterstützung können z. B. folgende Aufforderungen dienen:

- Formuliere die Aufgabenstellung mit eigenen Worten.
- Markiere im Text Wörter, die du nicht verstanden hast.
- Übersetze den Text in Bilder (Tabellen, Skizzen, ...).

Die Übersetzung in ein mathematisches Modell sollte schrittweise nachvollzogen und über bildliche Darstellungen des Sachverhaltes veranschaulicht werden.



Die Schülerinnen und Schüler können danach angeregt werden, ähnliche Aufgabenstellungen zu veranschaulichen und zu lösen, wie:

- Anna löst die Hälfte ihrer Aufgaben allein. Bei der Hälfte der restlichen Aufgaben hilft ihr der Vater. Es bleiben noch 3 Aufgaben übrig. Wie viele Aufgaben soll Anna lösen?
- Ein Drittel seines Taschengeldes gibt Tim für sein Handy aus. Die Hälfte vom Rest spart er regelmäßig. Es bleiben ihm noch 5 € zur freien Verfügung. Wie viel Taschengeld bekommt Tim?

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, ist die Bearbeitung von Aufgabenstellungen mit höherem Schwierigkeitsgrad (Zahlenwerte, notwendige Bearbeitungsschritte, selbstständige Formulierung der Fragestellung) möglich.

- Anna löst ein Drittel ihrer Aufgaben allein. Bei einem Viertel der restlichen Aufgaben hilft ihr Vater. Es bleiben noch 3 Aufgaben übrig.
Formuliere eine Frage dazu und beantworte sie.
- Ein Fünftel seines Taschengeldes gibt Tim für sein Handy aus. Die Hälfte vom Rest spart er regelmäßig. Es bleiben ihm noch 5 € zur freien Verfügung.
Formuliere zwei Fragen, die du mit den Angaben des Textes beantworten kannst.

Aufgabe 23: Gleichung

Aufgabe

Die Strecke a ist 10 cm länger als die Strecke b.

Welche Gleichungen passen zu diesem Sachverhalt?
Kreuze **alle richtigen** Möglichkeiten an.

- ☐ $a + 10 = b$
- ☐ $b + 10 = a$
- ☐ $a \cdot 10 = b$
- ☐ $a - 10 = b$

Lösung

- ☐ $a + 10 = b$
- ☒ $b + 10 = a$
- ☐ $a \cdot 10 = b$
- ☒ $a - 10 = b$

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler die natürliche Sprache in eine symbolische und formale Sprache übersetzen (K5). Sie benötigen Vorstellungen von Streckenlängen. Die Strecken a und b sind in einen quantitativen Zusammenhang zu setzen (L4, K3). Die Schülerinnen und Schüler müssen für mehrere Antwortmöglichkeiten prüfen, ob sie dem gegebenen Sachverhalt entsprechen (AB II).

Folgende **Fehler** sind zu erwarten:

- Es wird die erste Antwortmöglichkeit angekreuzt, weil bei der Modellierung nicht erkannt wird, dass die Variable a bereits die längere Strecke repräsentiert. Um die Strecke a als längere Strecke „auszuweisen“ wird der Längenunterschied zu a addiert. Es wird nicht erkannt, dass damit eine falsche Aussage entsteht.
- Die dritte Antwortmöglichkeit wurde angekreuzt, weil die Relation „länger als“ als das Vervielfachen mit 10 gedeutet wurde.
- Wurde nur eine der beiden richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt, so liegt nahe, dass der Hinweis im Aufgabenstamm „alle Möglichkeiten“ nicht beachtet wurde.

Falls die Lösung „ $b + 10 = a$ “ fehlt, wurde der Streckenvergleich eventuell einseitig von der längeren Strecke a aus betrachtet. Die Möglichkeit, dass die kürzere Seite auch verlängert werden kann, um eine wahre Aussage zu erhalten, wurde übersehen.

Falls die Lösung „ $a - 10 = b$ “ fehlt, wurde der Streckenvergleich nur von der kürzeren Seite b aus betrachtet. Die Schülerinnen und Schüler haben übersehen, dass die Längen auch gleich werden, wenn man die längere Seite verkürzt.

Für eine detaillierte **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Überlegungen bei der Lösungsfindung zu formulieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

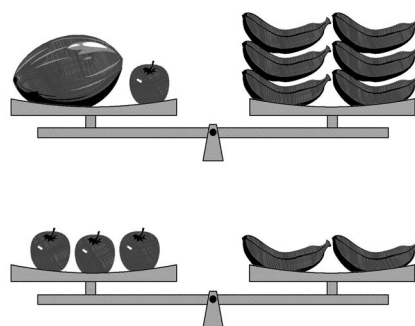
Für Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, ist es hilfreich, zunächst für die Variablen konkrete Werte einzusetzen. Anschließend kann von den konkreten Gleichungen abstrahiert werden, indem für die längeren Strecken die Variable a und für die kürzeren Strecken die Variable b eingesetzt wird.

Zusätzlich kann in diesem Zusammenhang auch die Fachterminologie für die Grundrechenarten wiederholt werden. Die Übersetzung realer Sachverhalte in Termbeziehungen sollte im weiterführenden Unterricht an vielfältigen Sachverhalten behandelt und jeweils mehrere mögliche Lösungen besprochen werden.

- Stelle einen passenden Term auf:
 - a) Paul bekommt 5 € Taschengeld mehr als Anton.
 - b) Seite c ist dreimal so lang wie Seite d .
 - c) Stefan war 5 min langsamer als Linus.
 - d) Anna ist 3 Jahre älter als Pia. Pia ist genauso alt wie Luzie in 2 Jahren.

Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten hatten, können vergleichbare Aufgaben zu komplexeren Sachverhalten bearbeiten.

- Löse die Aufgaben mit Hilfe von Termen:
 - a) Anna ist 3 Jahre älter als Pia. Pia ist genauso alt wie Luzie in 2 Jahren. Vergleiche das Alter von Anna und Luzie.
 - b) Christine erhält $2\frac{1}{4}$ mal so viel Taschengeld wie ihr jüngerer Bruder Peter. Christine bekommt monatlich 18 €. Wie viel Taschengeld bekommt Peter?
 - c) Jede Banane wiegt 180 g. Die Äpfel sind ebenfalls alle gleich schwer. Die beiden in der Abbildung dargestellten Waagen sind im Gleichgewicht. Wie viel wiegt die Melone?

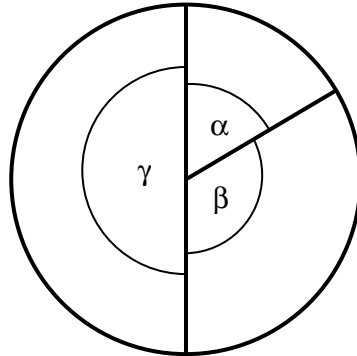


(siehe auch /3/ Kommentierungsheft zum Haupttest 2010; Heft C, Aufgabe 18)

Aufgabe 24: Kreisteile

Aufgabe

In einem Kreis sind verschiedene Kreisteile durch ihre Winkel gekennzeichnet.
Es gilt: $\alpha = 60^\circ$



Gib den Anteil des Winkels α am Vollwinkel als Bruch an.

Der Anteil des Winkels α am Vollwinkel beträgt _____ .

Lösung

$\frac{1}{6}$ (oder gleichwertige Angabe)

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Zahl (L1)
Kompetenz:	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich:	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Abbildung den Kreissektor identifizieren, der durch den Winkel gekennzeichnet wird (K4). Sie benötigen Sinn tragende Vorstellungen von Bruchzahlen und ihrer Verwendung zur Angabe von Anteilen (L1). Die Größen des Winkels α und des Vollwinkels müssen ins richtige Verhältnis gesetzt werden. Es handelt sich um ein einschrittiges Routineverfahren. Der Bruch muss nicht gekürzt werden (K5, AB I).

Fehler sind hauptsächlich dann zu erwarten, wenn die Vorstellungen von Bruchzahlen und ihrer Verwendung zur Angabe von Anteilen nicht tragfähig genug sind, um die Aufgabenstellung zu erfassen. Rechenfehler dürften bei dem gegebenen einfachen Zahlenmaterial eher die Ausnahme sein. Denkbar ist auch, dass dem Innenwinkel des Vollkreises keine oder eine von 360° abweichende Winkelgröße zugeordnet wird.

Für eine **Diagnose** ist es hilfreich, die Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg schildern zu lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

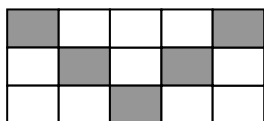
Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, wird es sinnvoll sein, sich noch einmal grundlegend mit Bruchzahlen zur Angabe von Anteilen zu beschäftigen.

Aufgaben, in denen Anteile von Kreisen, Rechteckflächen oder den Flächen anderer Vielecke abgelesen bzw. in diese eingezeichnet werden müssen, bieten sich an. Dabei ist besonders auf die exakte Verwendung der Sprache zu achten, wie zum Beispiel: „Wie groß ist der grau gefärbte Anteil an dem gesamten Rechteck?“

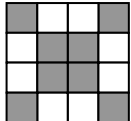
Weiter können Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, Brüchen Abbildungen von Repräsentanten zuzuordnen.

- Welcher Anteil der Figur ist grau gefärbt?

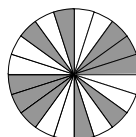
a)



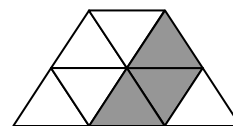
b)



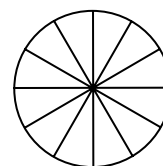
c)



d)

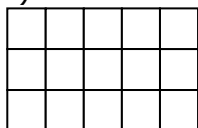


- Ein Kreis ist in 12 gleich große Teile zerlegt.
a) Gib die Winkelgröße eines Kreisteils an.
b) Färbe in der Figur drei zusammenhängende Kreisteile. Gib die Größe des gefärbten Kreisteils als Bruch und als Winkel an.



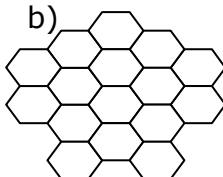
- Färbe in der Figur den angegebenen Anteil.

a)



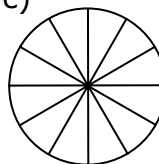
$$\frac{3}{5}$$

b)



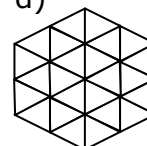
$$\frac{1}{2}$$

c)



$$\frac{2}{3}$$

d)



$$\frac{5}{8}$$

Die Schwierigkeit lässt sich bei den beschriebenen Aufgaben dadurch erhöhen, dass eine Unterteilung der Figuren nicht vorgegeben wird.

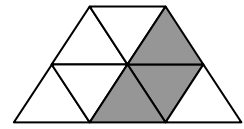
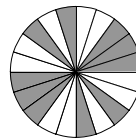
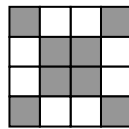
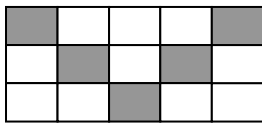
- Stelle jeweils die Anteile in folgenden Figuren dar:

- a) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{12}$ in verschiedenen Rechtecken
b) $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$ und $\frac{5}{8}$ in verschiedenen Kreisen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben, können komplexere Figurvorgaben bearbeiten oder selbst erfinden.

Darüber hinaus kann die Gesamtheit bei der Aufgabenstellung so verändert werden, dass sie nur noch einen Teil einer Figur umfasst, z. B.:

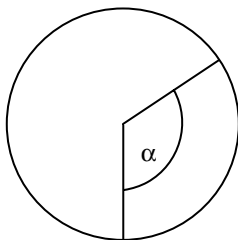
- Gegeben sind die vier Figuren:



- (1) Die mittlere Zeile des Rechtecks enthält 2 grau gefärbte Kästchen. Welcher Anteil von der mittleren Zeile ist grau gefärbt?
- (2) Das große Quadrat wird vollständig in vier gleichgroße kleinere Quadrate zerlegt. Wie groß ist der gefärbte Anteil in jedem dieser kleinen Quadrate?
- (3) Gibt es Teile des Kreises, in denen der Anteil der gefärbten Fläche gleich groß ist? Begründe.
- (4) Die gefärbte Fläche ist $\frac{3}{4}$ des Ganzen. Umrahme das Ganze farbig.

Auch Umkehrungen der Testaufgabe sind denkbar.

- Wie groß ist der Winkel α , wenn das Kreisteil den angegebenen Anteil am Vollkreis haben soll.

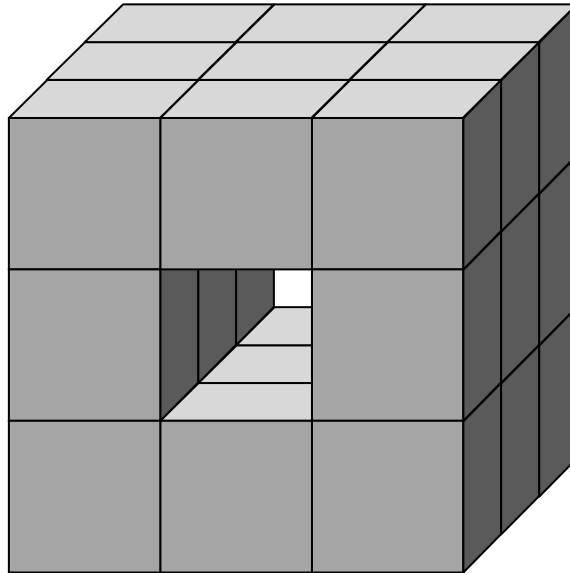


Anteil	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
α					

Aufgabe 25: Würfeltunnel

Aufgabe

Aus 27 kleinen Würfeln mit gleicher Kantenlänge kann man einen großen Würfel zusammensetzen. Der abgebildete Körper entsteht, wenn aus einem solchen großen Würfel eine komplette Reihe kleiner Würfel herausgenommen wird.



Werden weitere kleine Würfel herausgenommen, können zusätzlich noch ein Tunnel von links nach rechts und ein Tunnel von oben nach unten entstehen. Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht dann der Restkörper?

Der Restkörper besteht dann aus _____ kleinen Würfeln.

Lösung

20

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Raum und Form (L3)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Diese Aufgabe erfordert räumliche Vorstellung (L3). Die Veränderungsprozesse am Würfel sind dem Text zu entnehmen und an Hand der Skizze wiederzuerkennen (K4). Um die Frage nach der Würfel-Anzahl zu beantworten, wird eine geeignete Bestimmungsstrategie (K2) benötigt. In der Regel wird diese entweder auf eine von der Prozess-Vorstellung getragene Subtraktion oder auf ein von der Zielkörper-Vorstellung getragenes systematisches Abzählen

hinauslaufen. Diese Aufgabe stellt für die Schülerinnen und Schüler ein anspruchsvolles Problem dar (AB III).

Ein häufig auftretender **Fehler** wird die Annahme sein, bei jedem Veränderungsschritt würden gleich viele Würfel entfernt. Dieser Irrtum führt zu dem falschen Ergebnis 18. Andere falsche Ergebnisse können durch Irrtümer beim Abzählen oder durch Raten zustande gekommen sein.

Eine sichere **Diagnose** wird nur nach Rücksprache mit den Schülerinnen und Schülern möglich sein.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, könnten auf verschiedenen Anspruchsniveaus gefördert werden. So könnte diese Aufgabe noch einmal bearbeitet werden, diesmal aber mit Hilfsfragen zu den einzelnen Veränderungsschritten:

„Wie viele kleine Würfel werden in diesem Schritt entfernt, wie viele bleiben übrig?“

Wenn das Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler nicht ausreicht, die Aufgabe nur mit Hilfsfragen zu lösen, so kann über das Hantieren mit gegenständlichen Würfeln der räumlichen Vorstellung nachgeholfen werden, z. B. mit einem vorgefertigten festen Modell des Zielkörpers, in das die anderen Würfel lose eingelegt werden.

Eine analoge Aufgabe kann sich auf ein Quadratplattenmuster beziehen, aus dem zunächst eine waagerechte und dann eine senkrechte Reihe zu entfernen und der Vorgang der Verminderung zu beschreiben ist. Falls die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit systematischem Abzählen haben, kann ein abzählendes Hantieren in Verbindung mit einer Beschreibung der gewählten Abzählsystematik hilfreich sein.

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können durch weitere Varianten der Umgestaltung von Würfelkörpern gefördert werden.

Beispiele:

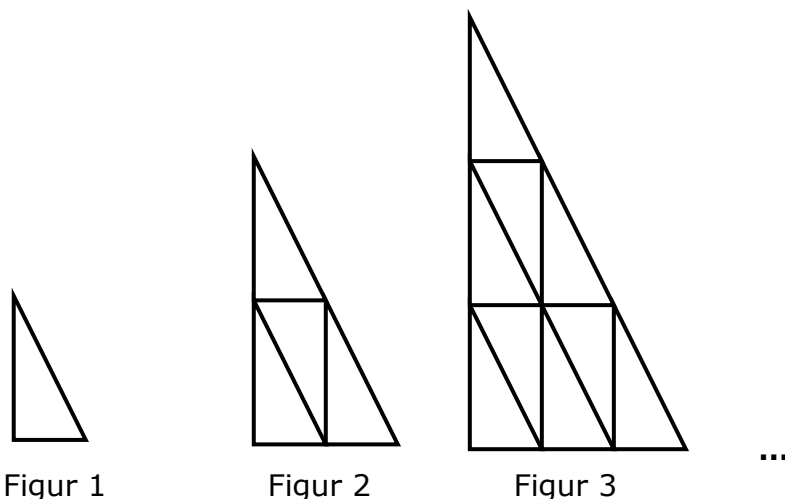
- Nachdem aus dem Würfel der Aufgabe „Würfeltunnel“ alle kleinen Mittenwürfel entfernt worden sind, sollen die Ecken „verstärkt“ werden, indem auf jede außen liegende Fläche der Eckenwürfel ein weiterer kleiner Würfel aufgesetzt wird. Wie viele kleine Würfel hat der so hergestellte Körper?
- Ein großer Würfel wird aus kleinen Würfeln zusammengesetzt. Seine Kanten sind viermal so lang wie eine kleine Würfelkante. Nun sollen die außen liegenden kleinen Würfelflächen so eingefärbt werden, dass auf jeder Fläche des großen Würfels ein Schachbrettmuster entsteht. Wie viele kleine Würfel werden dabei schwarz gefärbt?

Im Rahmen der **Differenzierung** können Schülerinnen und Schüler sich auch derartige Aufgaben selbst ausdenken.

Aufgabe 26: Dreiecksfigur

Aufgabe

Die Abbildung zeigt eine Folge von Figuren, die aus unterschiedlich vielen gleichen Teildreiecken zusammengesetzt sind.



Aus wie vielen gleichen Teildreiecken besteht Figur 8?

Figur 8 besteht aus _____ gleichen Teildreiecken.

Lösung

64

Informationen zur Aufgabe

Leitidee:	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz:	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich:	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erkennen einen quantitativen Zusammenhang in den Dreiecksfiguren (L4, K4). Sie verwenden heuristische Mittel (K2), um die Anzahl der Teildreiecke für die weiteren Figuren zu ermitteln. Dabei können sie durch Anfertigen einer Skizze, durch das Auszählen der Teilfiguren oder durch Ermitteln der jeweils hinzukommenden Teildreiecke (+ 3, + 5, + 7, + 9, ...) zur Lösung kommen. Auch das Nutzen eines allgemeinen, formalen Bildungsgesetzes (n^2) ist möglich. Die Schülerinnen und Schüler lösen ein anspruchsvolles Problem durch mehrschrittiges strategiegestütztes Vorgehen (AB III).

Es können Additions- bzw. Zählfehler auftreten. Die Angabe der Zahl 15 weist zum Beispiel darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler nur die Anzahl der

neu hinzu gekommenen Teildreiecke für die Figur 8 angegeben haben und nicht die Gesamtzahl der Teildreiecke.

Zur **Diagnose** falscher, aber auch fehlender Angaben, sollten die Schülerinnen und Schüler im Unterricht ihre Vorgehensweise erläutern. Dabei ist es möglich zu erkennen, ob es Schwierigkeiten beim Erfassen funktionaler Zusammenhänge gibt.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, können zunächst handlungsorientiert üben. Dabei sollten Aufgaben gestellt werden, die ausschließlich handelnd bzw. durch Skizzen bearbeitbar sind (wie Streichholzfiguren fortsetzen, Münzen auslegen, aus Bausteinen Figuren herstellen) und auf den verallgemeinernden Aspekt verzichten.

Über das Verbalisieren der Veränderungen zur jeweils folgenden Figur und das Feststellen der Anzahl der benötigten Gegenstände können sie an das jeweilige Bildungsgesetz herangeführt werden.

Zum Beispiel:

- Baue Streichholzketten nach dem vorgegebenen Muster.
- Bestimme die Anzahl der Hölzer für 1, 2, 3, 4 und 5 Kettenglieder.
- Beschreibe die Gesetzmäßigkeit in Worten.
- Bestimme die Anzahl der Hölzer für 10 und 20 Kettenglieder.
- Vervollständige den Satz: Die Anzahl der Hölzer bei x Kettenglieder ist ...

Anzahl der Ketten- glieder	1	2	3	4	5	10	20	x
Muster 1								3 x
Anzahl der Hölzer	3	6						
Muster 2								
Anzahl der Hölzer	5	...						
Muster 3								
Anzahl der Hölzer	3	...						

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, kann die Anforderung erhöht werden, indem man die Figuren komplexer wählt und die Art der Vorgabe variiert. Es kann auch verstärkt auf die Formulierung eines allgemeingültigen Bildungsgesetzes hingearbeitet werden. Die Lösungen erfordern dabei im stärkeren Maße eine Abstraktion bzw. sogar eine Verallgemeinerung. Es können auch Angebote gemacht werden, die auf eine konkrete Veranschaulichung verzichten (Zahlenfolgen fortsetzen, Zahlenfolgen nach Bildungsgesetzen erstellen).

Anzahl der Ketten- glieder	1	2	3	4	5	10	20	x
Muster 1								
Anzahl der Hölzer	5	12						7×-2
Muster 2								
Anzahl der Hölzer	4	9	14		24			
Muster 3								
Anzahl der Hölzer	6	10	14			42		
Muster 4								
Anzahl der Hölzer								6×-1

(siehe auch /3/ Kommentierungshefte zum Haupttest 2009; Heft A, Aufgabe 11;
Heft B, Aufgabe 1 und Heft C, Aufgabe 1 und /5/)