

Lernstandserhebung

Didaktisches Material

BILDUNGSLAND
Hessen 

6

Mathematik

 (Heft C)

2011/2012

Impressum

Erarbeitet durch

AufgabenentwicklerInnen des Länderverbundes Lernstand / VERA 6:

Manfred Bergunde	Hamburg
Kerstin Both	Mecklenburg Vorpommern
Maria Braunhofer	Südtirol, Italien
Detlef Cords	Mecklenburg Vorpommern
Helmut Fehre	Sachsen
Klaus Gülker	Mecklenburg Vorpommern
Stefanie Heinisch	Hamburg
Angelika Klatte	Sachsen
Evelin Klingebiel	Thüringen
Christoph Kost	Hessen
Heide Kretzschmar	Mecklenburg Vorpommern
Sibylle Mackenroth	Sachsen
Michaela Schober	Thüringen
Sylvia Welisch	Hessen

Koordination und Leitung:

Astrid Fischer-Paulin	SBI, Radebeul
Heiko Wontroba	Thillm, Bad Berka

Begutachtung und Beratung:

Dr. Christa Herwig	Thüringen
Prof. Dr. Dominik Leiß	Leuphana Universität, Lüneburg

Inhaltsverzeichnis

Impressum	2
Inhaltsverzeichnis	3
Zuordnung von Standardmerkmalen	4
Vorbemerkungen	5
Aufgabe 1: Autobahn.....	7
Aufgabe 2: Flächeninhalt eines Rechtecks.....	9
Aufgabe 3: Kugeln	11
Aufgabe 4: Spiegel.....	13
Aufgabe 5: Symmetrie bei Flaggen	16
Aufgabe 6: Regenmesser	19
Aufgabe 7: Lagebeziehungen von Geraden	23
Aufgabe 8: Turm aus Bausteinen.....	26
Aufgabe 9: Tiersammlung	29
Aufgabe 10: Schokotraum.....	32
Aufgabe 11: Zoobesuch	36
Aufgabe 12: Auswahl.....	40
Aufgabe 13: Blutkreislauf.....	43
Aufgabe 14: Bruchrechnung	45
Aufgabe 15: Glasscheibe.....	48
Aufgabe 16: Wandfarbe	51
Aufgabe 17: Körpergewicht	56
Aufgabe 18: Becher.....	59
Aufgabe 19: Fehlende Ziffern.....	64
Aufgabe 20: Würfel	66

Zuordnung von Standardmerkmalen

Aufgaben		Allgemeine mathematische Kompetenzen						Leitideen					Anforderungsbereiche		
Nr.	Kurztitel	K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	I	II	III
1	Autobahn			x		x					x		x		
2	Flächeninhalt eines Rechtecks		x			x			x				x		
3	Kugeln		x				x	x						x	
4	Spiegel			x	x	x			x					x	
5	Symmetrie bei Flaggen				x					x				x	
6a	Regenmesser			x	x		x					x		x	
6b	Regenmesser			x	x		x					x		x	
7	Lagebeziehungen von Geraden				x					x				x	
8a	Turm aus Bausteinen		x			x	x		x	x			x		
8b	Turm aus Bausteinen		x			x			x	x				x	
9	Tiersammlung		x	x		x		x							x
10	Schokotraum				x		x				x			x	
11	Zoobesuch		x	x		x	x		x					x	
12	Auswahl		x			x		x						x	
13	Blutkreislauf			x		x					x			x	
14	Bruchrechnung		x			x		x						x	
15	Glasscheibe	x	x		x	x			x	x				x	
16	Wandfarbe			x		x					x			x	
17	Körpergewicht				x						x	x		x	
18	Becher			x		x			x					x	
19	Fehlende Ziffern		x			x		x							x
20	Würfel	x	x			x			x	x					x

Legende:

Allgemeine mathematische Kompetenzen

- K1: Mathematisch argumentieren
 K2: Probleme mathematisch lösen
 K3: Mathematisch modellieren
 K4: Mathematische Darstellungen verwenden
 K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
 K6: Kommunizieren

Leitideen

- L1: Zahl
 L2: Messen
 L3: Raum und Form
 L4: Funktionaler Zusammenhang
 L5: Daten und Zufall

Anforderungsbereiche

- I: Reproduzieren
 II: Zusammenhänge herstellen
 III: Verallgemeinern und Reflektieren

Vorbemerkungen

Adressaten sind Lehrkräfte, in deren Klasse der Test geschrieben wurde, sowie weitere Lehrkräfte, Fachkonferenzen und innerschulische Gruppen. Sie alle sollen durch das vorliegende Material angeregt werden, Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu erkennen, insbesondere im Hinblick auf die individuelle Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler.

Aufbau und Struktur sind durch die Aufgaben des Tests bestimmt. Jede Aufgabe ist kommentiert. Der Umfang und die Tiefe des Kommentars richten sich nach der Besonderheit der betreffenden Aufgabe. Die Reihenfolge der Kommentierungen ist dieselbe wie die der Aufgaben im Testheft. Die Aufgabennummer ist zur schnelleren Orientierung zusätzlich in der Fußzeile zu sehen.

Eine Kommentierung zu einer Aufgabe umfasst folgende Teile:

- Bemerkungen zur Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler
 - Begründung für die Zuordnung der Standardeigenschaften¹ (und damit der Hinweis auf das didaktische Potential der Aufgabe),
 - häufig zu erwartende Fehler und Hinweise zur Diagnose,
- Hinweise zur Weiterarbeit.

Bezüge zu den Bildungsstandards sind bei der Erarbeitung bzw. Auswahl der Aufgaben für den Test hergestellt worden. Sie werden im vorliegenden Material zum einen durch die Analyse der Standardeigenschaften bei jeder Aufgabe, zum anderen durch die Verteilung jeder Standardeigenschaft in der Menge aller Aufgaben eines Testheftes deutlich. Nicht in jedem Testheft gelingt es, den Bezug zu den Bildungsstandards in seiner notwendigen Breite abzubilden. Mitunter konnte von komplexeren Aufgaben mit mehreren Teilen nur eine Teilaufgabe ausgewählt werden und es musste auf weitere mathematisch interessante Aspekte verzichtet werden. Die Kommentierungen ermöglichen aber, weitere Teilaufgaben aufzugreifen und Aufgabenvariationen im Sinne der Bildungsstandards zu ergänzen.

Zielstellung ist es, Lehrkräfte in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei jeder Schülerin und jedem Schüler zu unterstützen. Dazu müssen sie u. a. Klarheit darüber haben, welches Potential in einer Aufgabe enthalten ist und wodurch es verändert bzw. variiert werden kann. So kann über längere Zeiträume hinweg am Aufbau von Kompetenzen gearbeitet werden. Im vorliegenden Material wird für jede Aufgabe die Zuordnung zu den Standardmerkmalen (Leitidee, mathematische Kompetenz und Anforderungsbereich) vorgenommen und begründet. An einigen Stellen wird so deutlich, dass die Art und Weise der Bearbeitung einer Aufgabe letztendlich die Zuordnung zu einer mathematischen Kompetenz bestimmt.

Teil jeder Kommentierung sind auch mögliche **Überlegungen der Schülerinnen oder Schüler** beim Bearbeiten der Testaufgaben. Es werden in

¹ Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 4.12.2003, S.7 – 15.

diesem Zusammenhang Voraussetzungen für die Bearbeitung einer Aufgabe, mögliche Bearbeitungswege, Ergebnisse und häufig zu erwartende Fehler betrachtet und darüber hinaus Hinweise zur Diagnose gegeben. Dies soll die Lehrkräfte dabei unterstützen, Ansätze zur individuellen Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler zu entwickeln. Weiterhin enthält die Kommentierung für jede Aufgabe Vorschläge, wie diese verändert bzw. variiert werden kann, um eine systematische Weiterarbeit im Unterricht zu ermöglichen. Die Vorschläge beinhalten auch Anregungen zur Nutzung unterschiedlicher Lösungswege, Hinweise auf den Umgang mit verschiedenen Lösungen und Überlegungen zum Realitätsbezug des in einer Aufgabe gegebenen Sachverhalts.

An der Weiterentwicklung wird von Jahr zu Jahr gearbeitet. Hinweise zum vorliegenden Material nehmen wir gern unter kompetenztest@sbi.smk.sachsen.de entgegen.

Literatur:

- /1/ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 04.12.2003
- /2/ W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. 2006
- /3/ Didaktische Kommentierungen zu den Testheften Lernstand / VERA 6 Mathematik 2008, 2009, 2010 und 2011
- /4/ Testhefte Lernstand / VERA 6 Mathematik 2008, 2009, 2010 und 2011
- /5/ Kompetenztest Mathematik Thüringen

Aufgabe 1: Autobahn

Aufgabe

Familie Schmidt fährt auf der Autobahn in jeder Minute durchschnittlich 2,0 Kilometer. Nach einer Pause sagt der Sohn Peter:
„In der Zeit unserer Pause hätten wir 50 Kilometer fahren können.“

Wie lange hat Familie Schmidt Pause gemacht?

Familie Schmidt hat _____ Minuten Pause gemacht.

Lösung

25

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen einen quantitativen Zusammenhang zwischen Zeitdauer und gefahrener Streckenlänge erkennen (L4). Sie übertragen die realitätsnahe Situation in ein mathematisches Modell und schlussfolgern, dass sich die einander zugeordneten Werte proportional zueinander verhalten (K3). Familie Schmidt fährt durchschnittlich 2 Kilometer pro Minute, somit legt sie in 2 Minuten die doppelte Strecke und in 3 Minuten die dreifache Strecke ... zurück. Über die in der Wirklichkeit auftretenden Phasen von Beschleunigung und Abbremsen wird nichts gesagt. Diese werden mit dem Wort „durchschnittlich“ ausgeschlossen und bei der Modellierung nicht berücksichtigt.

Die Schülerinnen und Schüler könnten sich einen möglichen Lösungsweg durch eine Tabelle veranschaulichen und so zur Lösung kommen (K5):

Zeit in Minuten	Weg in Kilometer
1	2
...	...
25	50

Eine weniger ausführliche Lösungsmöglichkeit ist die sofortige Division von 50 (km) : 2 (km/min), um die Zeitdauer zu ermitteln, die die Familie für 50 km gebraucht hätte (K5).

Die Modellierung ist den Schülerinnen und Schülern vertraut und direkt erkennbar (AB I).

Fehler haben ihre Ursache vor allem darin, dass die Schülerinnen und Schüler den quantitativen Zusammenhang zwischen Zeitdauer und Streckenlänge nicht erkennen. Auch Rechenfehler sind möglich.

Zur **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Lösung erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, sollte man anschauliche Aufgaben zu proportionalen Zusammenhängen bearbeiten. Hier bieten sich Zuordnungen zwischen Ware und Preis, Stückzahl und Masse oder Maßstabtabellen an.

Weiterführende Aufgaben zum Thema, die eine Modellierung verlangen, könnten sich anschließen, z. B.:

- Eine Schulklasse mit 13 Mädchen und 11 Jungen besucht in Münster den Allwetterzoo. Der Eintrittspreis für die Schulklasse beträgt 141,60 €. Die Lehrerin bezahlt als Begleitperson nichts.
 - a) Ermittle den Eintrittspreis für einen Schüler bzw. eine Schülerin, wenn man den Preis der Gruppenkarte auf die einzelnen Kinder aufteilt.
 - b) Fritz, dem der Besuch im Zoo gut gefallen hat, lädt seine fünf Freunde ebenfalls dorthin ein. Wie viel bezahlt er für sich und seine Freunde, wenn der reguläre Eintrittspreis ohne Gruppenrabatt 1,10 € pro Kind beträgt?
 - c) Eine Jahreskarte für den Allwetterzoo für Schüler kostet 35,00 €. Wie oft müsste Fritz als Einzelperson mindestens in den Zoo gehen, um die Jahreskarte auszunutzen?
- Sabines Schulweg beträgt 450 m. Sie benötigt für die Strecke im Durchschnitt 6 Minuten. Ihre Schulfreundin Lisa benötigt für ihren Schulweg im Durchschnitt 18 Minuten. Wie lang ist Lisas Schulweg, wenn man davon ausgeht, dass beide Mädchen mit der gleichen Geschwindigkeit in die Schule laufen?

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe lösen konnten, sollten komplexere Aufgaben mit realitätsnahen Problemen zu funktionalen Zusammenhängen angeboten werden, wie:

- Astrid möchte nach Eschwege in die Jugendherberge fahren. Eine Übernachtung mit Halbpension kostet 24,00 €. Ab dem 4. Tag sinkt der Preis für eine Übernachtung mit Halbpension auf 21,00 €.
 - a) Wie viel muss Astrid bezahlen, wenn sie 3 Übernachtungen mit Halbpension plant?
 - b) Sibylle will 7 Tage bleiben. Wie viel muss sie für die Übernachtungen mit Halbpension insgesamt bezahlen?
 - c) Manfred muss für seinen Aufenthalt in der Jugendherberge 219,00 € bezahlen. Wie lange war Manfred in der Jugendherberge, wenn er Übernachtung mit Halbpension gebucht hatte?
- Eine Stromrechnung für 8 Lampen beträgt bei täglich 8-stündiger Brenndauer 18 €. Welcher Betrag ist zu zahlen, wenn 12 Lampen mit gleicher Leistung in der gleichen Zeitspanne täglich 6 Stunden brennen?

Aufgabe 2: Flächeninhalt eines Rechtecks

Aufgabe

Ein Rechteck hat einen Flächeninhalt von 12 cm^2 .
Gib eine Möglichkeit für die Seitenlängen eines solchen Rechtecks an.

Länge: _____ Breite: _____

Lösung

Die Länge und die Breite eines Rechtecks wurden richtig angegeben, d. h. das Produkt der beiden Angaben ergibt 12 cm^2 .

Die Angabe kann auch in einer anderen Maßeinheit erfolgen.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB I

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler können bei der vorliegenden Aufgabe das Grundprinzip des Messens von Flächen bzw. Längen nutzen oder die Gleichung zur Berechnung des Flächeninhaltes von Rechtecken anwenden (L2).

Sie zeichnen z. B. ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von 12 Einheitsquadraten und bestimmen die Länge und die Breite oder suchen durch systematisches Probieren ein Zahlenpaar, dessen Produkt 12 ergibt (K2, K5). In der Regel werden sie natürliche Zahlen als Maßzahlen des Ergebnisses angeben (1 und 12, 2 und 6, 3 und 4). Es handelt sich um eine Routineaufgabe (AB I).

Fehlende Vorstellungen über die Bestimmung des Flächeninhaltes von Rechtecken können Ursache für auftretende **Fehler** oder für das Nichtlösen der Aufgabe sein. Es ist zu erwarten, dass einige Schülerinnen und Schüler nicht wissen, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks dem Produkt der beiden Seitenlängen entspricht, und daher nicht in der Lage sind, die richtigen Seitenlängen – es gibt mehrere Möglichkeiten – zu finden. Außerdem ist es möglich, dass einige Schülerinnen und Schüler den Flächeninhalt mit dem Umfang verwechseln und daher Seitenlängen wie 1 cm und 5 cm, 2 cm und 4 cm, 3 cm und 3 cm angeben.

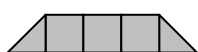
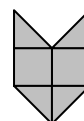
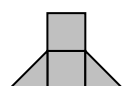
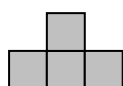
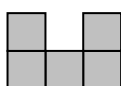
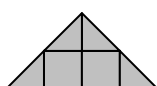
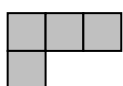
Zur **Diagnose** der Fehlerursache sollten die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, sollten verschiedene Rechtecke mit vorgegebenen Seitenlängen auf dem Kästchenraster ihres Heftes zeichnen und jeweils den Flächeninhalt durch Auszählen sowie durch Rechnung ermitteln.

Für weitere Auszählübungen bieten sich auch die folgenden Aufgaben an:

- Dieses Quadrat hat insgesamt einen Flächeninhalt von 1 cm^2 . Markiere unter den folgenden Figuren alle, die auch einen Flächeninhalt von 1 cm^2 haben.



(siehe auch /3/ 2011, Heft B, Aufgabe 24)

Anschließend können sie passende Seitenlängen zu gegebenen Flächeninhalten ermitteln. Hierbei ist deutlich darauf hinzuweisen, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks nicht mit dem Umfang des Rechtecks zu verwechseln ist. Dazu trägt die Forderung bei, zu den vorgegebenen Seitenlängen stets den Flächeninhalt und den Umfang des Rechtecks zu ermitteln.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten,** sind Übungen geeignet, die das Verständnis des Flächeninhaltsbegriffs auch in anspruchsvolleren Zusammenhängen verlangen, wie:

- Ermittle die fehlenden Werte.

Figur	Seitenlänge a in cm	Seitenlänge b in cm	Flächeninhalt in cm^2	Umfang in cm
Rechteck	3	5		
Rechteck	1		36	
Rechteck		6		20
Quadrat	5			
Quadrat				28
Quadrat			49	

- Gib alle Seitenlängen mit natürlichen Maßen an, bei denen ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von 36 cm^2 entsteht und berechne jeweils den Umfang.

Seitenlänge a in cm	Seitenlänge b in cm	Flächeninhalt in cm^2	Länge des Umfangs in cm
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		...	

Aufgabe 3: Kugeln

Aufgabe

In einem Beutel befinden sich 5 blaue und 4 rote Kugeln, die sich nur in der Farbe unterscheiden.

Die Kugeln werden mit verbundenen Augen einzeln aus dem Beutel entnommen und nicht wieder zurückgelegt.

Wie viele Kugeln muss man mindestens aus dem Beutel nehmen, um mit Sicherheit 3 Kugeln von der gleichen Farbe dabei zu haben?

Es müssen mindestens _____ Kugeln aus dem Beutel entnommen werden.

Lösung

5

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler führen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der Kugeln zu bestimmen (L1). Sie analysieren das vorgegebene praktische Problem und wenden eine heuristische Strategie an. Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe durch Probieren oder eine zeichnerische Darstellung lösen (K2). Sie müssen mit den im Text genannten Begriffen „mindestens“ und „mit Sicherheit“ umgehen können (K6). Dabei ist mehrschrittiges Vorgehen nötig (z. B. „Ausgehen vom ungünstigsten Fall“) (AB II).

Eine häufig zu erwartende **falsche** Antwort ist, dass 6 Kugeln gezogen werden. Die Schülerinnen und Schüler unterliegen hier dem Irrtum, dass von jeder Farbe 3 Kugeln gezogen werden müssen (drei blaue und drei rote Kugeln). Es ist in diesem Fall keineswegs sicher, dass die Schülerinnen und Schüler kombinatorische Überlegungen angestellt haben. Es ist auch möglich, dass die Bedeutung von „mindestens“ und „mit Sicherheit“ nicht klar ist. Den Schülerinnen und Schülern erschließt sich der Sinn der Aufgabe nicht. Für eine sichere **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse kommentieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten, haben eventuell ein Problem mit dem Begriff „mindestens“. Hier helfen Erklärungen aus der Alltagswelt.

- Du erhältst mindestens 5 Euro Taschengeld. Wie viel Geld könnte das sein?
- Familie Meyer fährt mindestens für eine Woche jedes Jahr in den Urlaub. Was sagt dir dieser Satz hinsichtlich der Länge des Urlaubs?

Dann sollten praktische Übungen zu Zufallsversuchen angeboten werden. Die Lösungen können durch Probieren gefunden werden. Die Versuche sollten mehrfach durchgeführt werden, um auf den ungünstigsten Fall einzugehen. Es empfiehlt sich, das einfach zu realisierende praktische Problem der vorliegenden Testaufgabe zu demonstrieren. Es müssen gleich geartete Objekte, die sich nur in der Farbe unterscheiden, benutzt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten vorher begründete Vermutungen abgeben. Hier kann auch schon mit einfachen Baumdiagrammen gearbeitet werden. Mögliche Fragestellungen sind:

- Welche Ergebnisse sind beim Entnehmen (1. Ziehung, 2. Ziehung) möglich?
- Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit Sicherheit 2 (3; 4; 5; 6) gleich farbige Kugeln zu erhalten? (unmögliches Ereignis: 6)
- Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit Sicherheit 2 (3) verschieden farbige Kugeln zu erhalten? (unmögliches Ereignis: 3)

Die angestellten Überlegungen lassen sich auf das „Hölzchenziehen“ übertragen:

- 3 kurze und 4 längere Hölzchen werden in einer Hand gehalten. Wie viele Hölzchen müssen mindestens gezogen werden, um mit Sicherheit
 - ein kurzes Hölzchen,
 - ein langes Hölzchen,
 - von jeder Sorte ein Hölzchen zu erhalten?

Ein bekanntes Beispiel dazu ist auch das folgende „Sockenproblem“:

- In einer nicht aufgeräumten Schublade für Socken liegen 10 schwarze Socken und 10 weiße Socken einzeln durcheinander. Um seine Frau nicht zu wecken, holt sich Herr Lehmann morgens im Dunkeln mehrere Socken aus dem gemeinsamen Schlafzimmer. Wie viele Socken muss er mitnehmen, um mit Sicherheit ein gleichfarbiges Paar zu erwischen?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten ähnliche Aufgaben mit mehr als zwei verschiedenen Elementen bearbeiten, wie:

- 3 blaue, 4 rote und 5 schwarze Kugeln sind im Beutel. Wie viele Kugeln müssen gezogen werden, um sicher
 - eine blaue (rote, schwarze),
 - zwei blaue (rote, schwarze),
 - usw. ...,
 - von jeder Farbe eine Kugel zu ziehen?

Kombinatorische Überlegungen zu Zahlenschlössern (Anzahl der Möglichkeiten bei 2, 3, 4 Ziffern), Anzahl zweistelliger Zahlen mit bestimmten Merkmalen, z. B. die Ziffer Drei enthalten oder auch zu Möglichkeiten bei einem Staffellauf mit vier Kindern können sich anschließen.

Die Schülerinnen und Schüler können auch aufgefordert werden, eigene Aufgaben aus ihrer Erfahrungswelt zu entwickeln.

Aufgabe 4: Spiegel

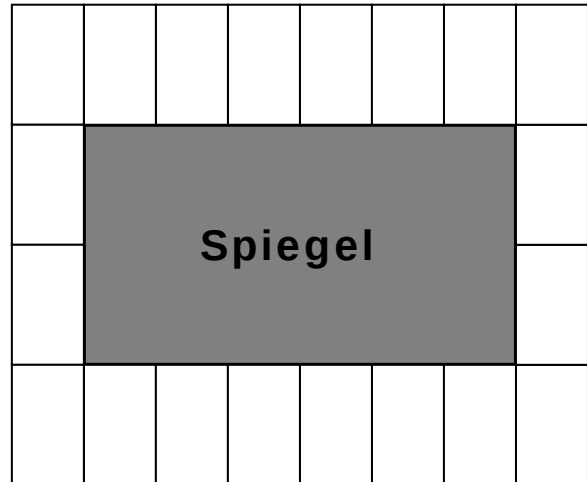
Aufgabe

Die Fliesen an der Badezimmerwand sind jeweils 15 cm lang und 10 cm breit.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Badezimmerspiegels?

(Die Fugen zwischen den Fliesen werden nicht berücksichtigt)

Der Flächeninhalt des Badezimmerspiegels beträgt _____ cm².



Lösung

1800

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe nutzen die Schülerinnen und Schüler Grundprinzipien des Messens (L2), indem sie z. B. über die Angabe der Seitenlängen der Fliesen die Seitenlängen des Spiegels bestimmen. Anschließend berechnen sie den Flächeninhalt des Spiegels (L2).

Sie müssen zunächst erkennen, dass die Seitenlänge des Spiegels über die Fliesen zu bestimmen ist (K3). Die für die Längenbestimmung erforderlichen Informationen müssen teilweise aus der Darstellung entnommen werden (K4, AB II), bevor das Lösungsverfahren angewandt werden kann (K5). Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht in der Zerlegung des Spiegels in Stücke, die genauso groß sind wie die Fliesen (K3), Bestimmung des Flächeninhalts einer Fliese und Berechnung der Spiegelfläche (K4, K5), was einem Auslegen der Spiegelfläche mit Fliesen entspricht.

Als Ursache für **Fehler** sind Schwierigkeiten in Bezug auf die Modellierung zu erwarten: fehlende bzw. falsche Zuordnung der im Text gegebenen Maße zu den Längen in der Darstellung oder fehlende bzw. falsche Verwendung der Maße zur Bestimmung des Flächeninhalts. Eine **Diagnose** kann sich aus den

Lösungsskizzen ergeben; sie ist jedoch schwierig, wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsansätze unvollständig oder gar nicht notieren. Gelingt den Schülerinnen und Schülern die Modellierung, können außerdem im weiteren Verlauf Rechenfehler auftreten.

Die Aufgabenstellung lässt zu, dass bei der Bestimmung des Flächeninhalts über die Längenmaße des Spiegels eine fehlerhafte Vertauschung von Länge und Breite einer Fliese vorkommt, ohne im Ergebnis eine Auswirkung zu zeigen, da infolge der Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation das Produkt der Längenmaße gleich bleibt. Da zur Lösung nur das Ergebnis einzutragen ist, ist das Rechenfeld lediglich als Kladde zu werten, sodass ggf. dort verwendete Längen von 20 cm und 90 cm an Stelle von 30 cm und 60 cm zu keinem Punktverlust führen sollten. Falls die Schülerinnen oder Schüler ohne Notizen im Kopf gerechnet hätten, wäre die Vertauschung ohnehin nicht sichtbar gewesen. Sollte eine Notiz über die falschen Längen von der Lehrkraft bemerkt werden, kann die Notiz Anlass zu einem Gespräch darüber geben, ob die Schülerin oder der Schüler nur zur Berechnung die Faktoren umgruppiert oder tatsächlich die Längen verwechselt hat.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, können Aufgaben bearbeiten, bei denen der Zusammenhang zwischen der zu bestimmenden Größe und den gegebenen Maßen offensichtlicher ist. Auch können die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, sich explizit mit Zerlegungen, zunächst von Längen, später auch von Flächen auseinanderzusetzen:

- Arsenji steht vor einer hohen Treppe. Er misst nach, dass eine Treppenstufe 22 cm hoch ist. Wie hoch ist die gesamte Treppe? (Bild rechts)

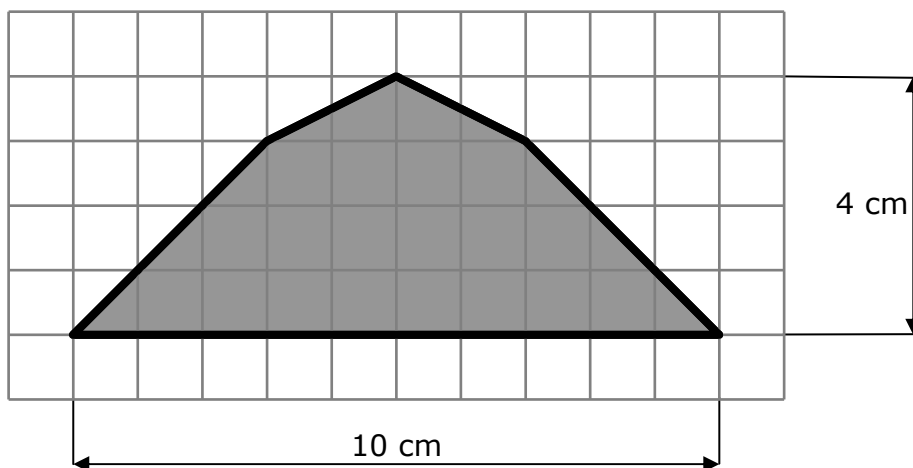


- Der Klassenraum von Alindas Klasse soll einen neuen Fußbodenbelag bekommen. Hierfür wird die Größe des Flächeninhaltes des Fußbodens benötigt. Der alte Fußbodenbelag besteht aus quadratischen Linoleumfliesen mit der Seitenlänge 0,5 m. In der Länge des Klassenraumes liegen genau 14 dieser Linoleumfliesen nebeneinander, in der Breite des Raumes sind es 16. Wie groß ist die Fläche von Alindas Klassenraum?
 - Fertige eine Skizze an.
 - Bestimme zunächst mithilfe der Anzahl der Linoleumfliesen die Seitenlängen der gesuchten Fläche, berechne sie dann.
 - Bestimme zunächst die Anzahl der Linoleumfliesen, berechne dann die gesuchte Fläche.
 - Vergleiche beide Lösungswege.

- Tamara möchte zusammen mit ihrer Mutter eine Patchworkdecke anfertigen. Hierfür plant Tamara, Quadrate mit der Seitenlänge 10 cm zu häkeln. Diese soll dann ihre Mutter zu einer Decke zusammennähen. Die fertige Decke soll 0,8 m x 1,50 m groß sein.
 - a) Wie viele Quadrate muss Tamara häkeln?
Fertige zunächst eine Skizze an.
 - b) Tamara will doch nicht so kleine Quadrate häkeln. Sie beschließt, die Quadrate 15 cm x 15 cm groß zu häkeln.
Kann ihre Mutter auch mit diesen Quadraten eine 0,8 m x 1,50 m große Decke anfertigen?

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten, können Aufgaben mit einem höheren Komplexitätsgrad angeboten werden wie:

- Bestimme den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(siehe auch /4/ 2009, Heft C, Aufgabe 10)

Aufgabe 5: Symmetrie bei Flaggen

Aufgabe



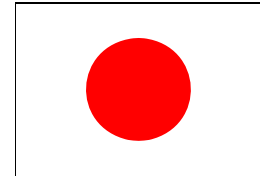
I



II



III



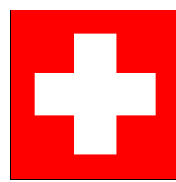
IV



V



VI



VII

Welche der abgebildeten Flaggen sind achsensymmetrisch?
Ergänze ihre Nummern im Antwortsatz.

Die Flaggen _____ sind achsensymmetrisch.

Lösung

I, II, IV, V, VI und VII

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler wenden ihr Wissen über Achsensymmetrie (L3) auf Figuren an. Hierbei muss die Form und die Färbung der Flaggen beachtet werden (K4). Es müssen sieben Flaggen untersucht werden (AB II).

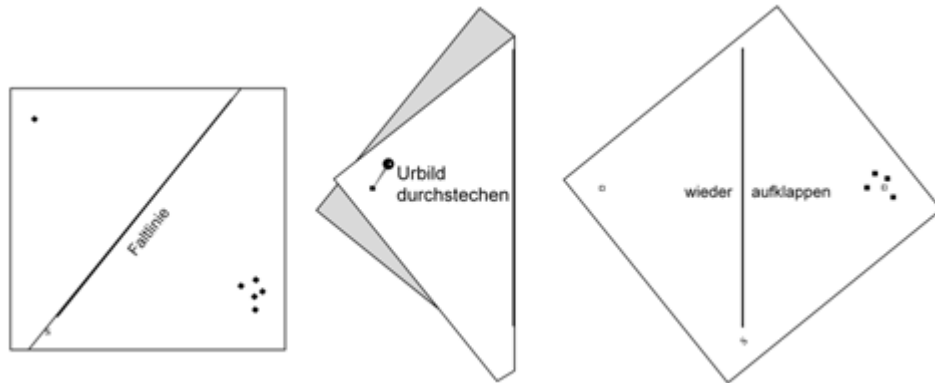
Auftretende **Fehler** könnten darin begründet sein, dass die Schülerinnen und Schüler entweder nur senkrechte Symmetrieachsen untersuchen, dann kommt es zur Nichtnennung der Flaggen II und IV. Oder sie beachten nur waagerechte Symmetrieachsen. Dann bleiben die Flaggen I und V unberücksichtigt. Schülerinnen und Schüler können sich aber auch bei Flagge II davon irritieren lassen, dass das Symbol nicht mittig in der Flagge abgebildet ist, sondern nach links verschoben ist.

Da sechs Flaggen zu nennen sind, kann es auch vorkommen, dass eine oder mehrere Flaggen aus Konzentrationsgründen nicht berücksichtigt werden.

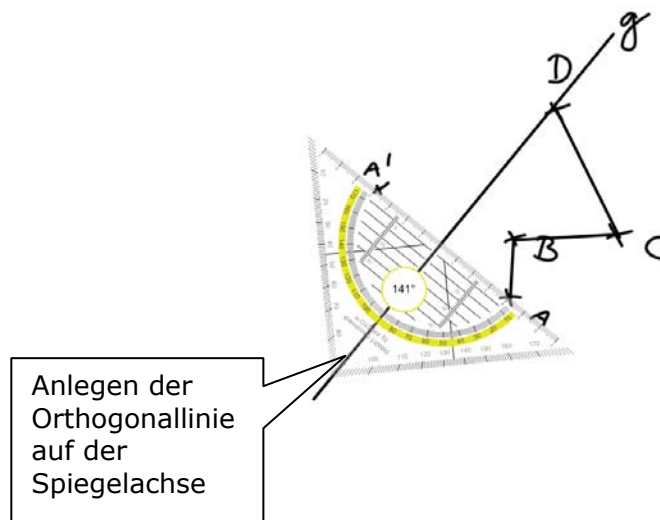
Zur **Diagnose** von Fehlern sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Lösungswege zu beschreiben und zu begründen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, sollte der Begriff Achsensymmetrie an vielfältigen einfachen Beispielen geklärt werden. Dabei könnten erneut einige Techniken zur Erzeugung und Untersuchung von Achsensymmetrie aufgegriffen werden, wie z. B. das Durchstechen markanter Punkte einer Figur, oder das Nutzen eines Spiegels.

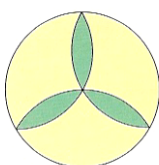
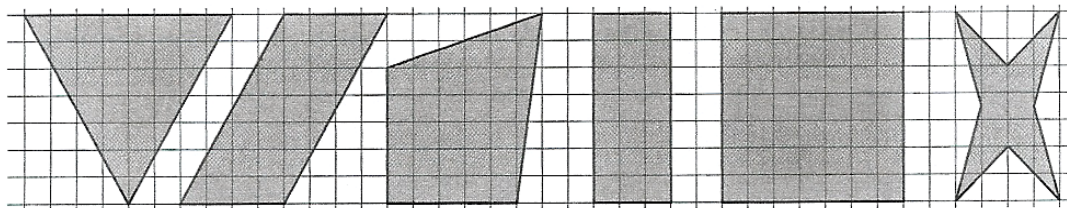


Auch der Gebrauch des Geodreieckes für die Achsenspiegelung kann wiederholt werden.



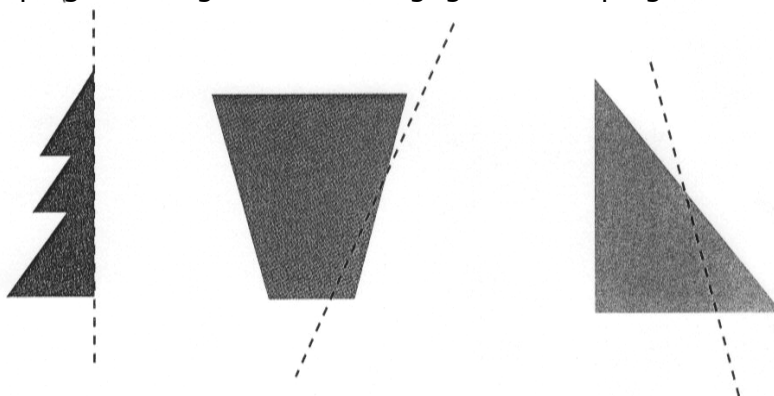
Übungen zu Figuren mit vielfältigen Lagen der Symmetrieachsen können sich anschließen.

- Trage in die folgenden Figuren alle Symmetrieachsen ein.

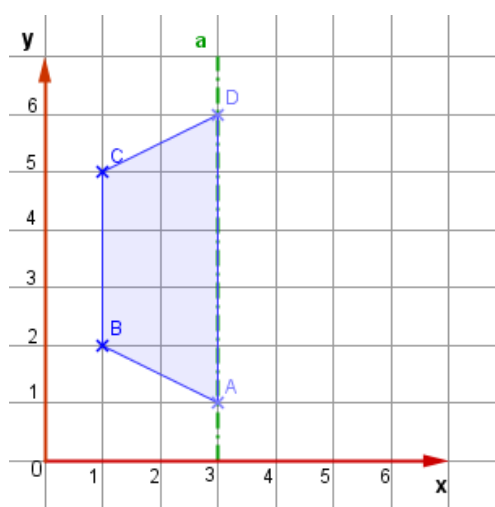


Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe richtig gelöst haben, können selbst achsensymmetrische Figuren erzeugen, oder eine Achsenspiegelung vornehmen. Dabei sollte nicht nur an waagrechten und senkrechten Achsen gespiegelt werden.

- Spiegel die Figur an der vorgegebenen Spiegelachse.



- Spiegel das Trapez ABCD an der Spiegelachse a. Gib die Koordinaten der Bildpunkte an.



Aufgabe 6: Regenmesser

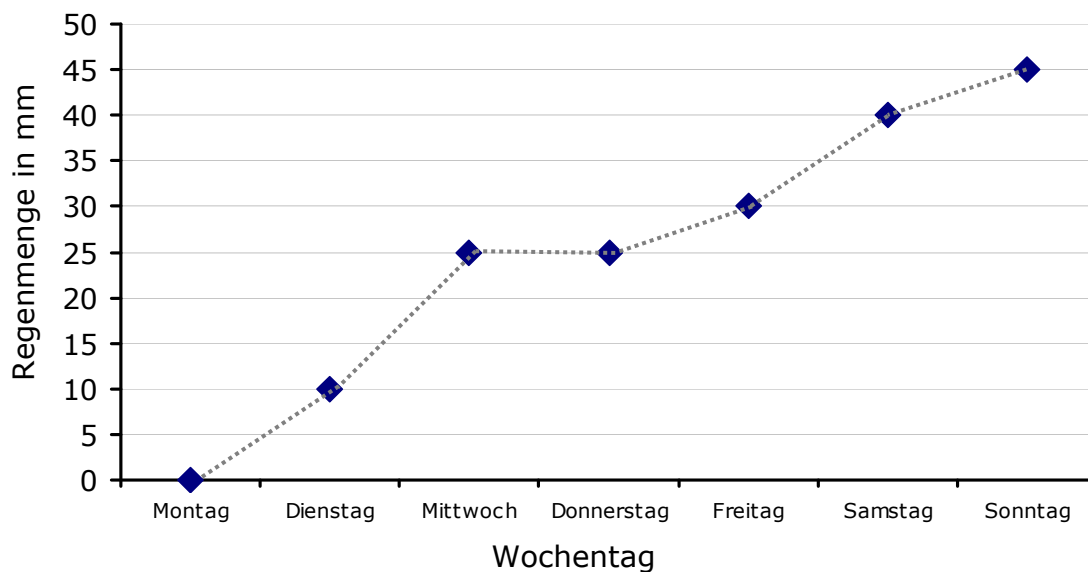
Aufgabe

Svea hat einen Regenmesser geschenkt bekommen.
Der Regenmesser ist ein Gerät, in dem Regenwasser gesammelt wird.

Svea stellt den Regenmesser am Montag auf und liest jeden Abend zur gleichen Zeit ab, wie viel Regen sich in ihrem Regenmesser gesammelt hat. Zwischendurch leert Svea den Regenmesser nicht. Es kommt also immer nur Wasser hinzu.



Die Grafik zeigt Sveas Ergebnisse.



- a) Zwischen welchen Messungen hat es keinen Regen gegeben?
Vervollständige den Satz:

Zwischen den Messungen am _____ und am _____ hat es keinen Regen gegeben.

- b) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Kreuze an.

Von Montag bis Dienstag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Dienstag bis Mittwoch sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Mittwoch bis Donnerstag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Donnerstag bis Freitag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Freitag bis Samstag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch
Von Samstag bis Sonntag sind (ungefähr) 10 mm Regen gefallen.	☐ wahr	☐ falsch

Lösungen

Aufgabe a)

Beide Wochentage wurden richtig ergänzt:

Zwischen den Messungen am **Mittwoch** und am **Donnerstag** hat es keinen Regen gegeben.

Aufgabe b)

Von Montag bis Dienstag ...	☒ wahr	☐ falsch
Von Dienstag bis Mittwoch ...	☐ wahr	☒ falsch
Von Mittwoch bis Donnerstag ...	☐ wahr	☒ falsch
Von Donnerstag bis Freitag ...	☐ wahr	☒ falsch
Von Freitag bis Samstag ...	☒ wahr	☐ falsch
Von Samstag bis Sonntag ...	☐ wahr	☒ falsch

... sind (ungefähr) 10mm Regen gefallen.

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei dieser Aufgabe geht es in erster Linie darum, einem Diagramm Messdaten zu entnehmen (L5, K4) und den entsprechenden mathemathikhaltigen Text Sinn entnehmend zu erfassen (K6), wobei die Textaussagen in Beziehungen zwischen den Messdaten zu übersetzen sind (K3). Wesentlich ist dabei u. a. die Erkenntnis, dass die Regenmenge eines Tagesintervalls nicht durch einen einzelnen Messwert, sondern durch die Differenz aufeinander folgender Messwerte repräsentiert wird. Die Lösungswege sind mehrschrittig (AB II).

Um den Lese- und Lösungsaufwand begrenzt zu halten, ist die Realsituation in der Aufgabe vereinfacht beschrieben worden, indem darauf verzichtet wurde, genauere Hinweise auf technische Details oder auf die Vernachlässigbarkeit der Verdunstung zu geben, und indem die Ablesewerte auf 5 mm - Abstufungen reduziert wurden.

In Teil **a)** gilt es zunächst zu erkennen, dass die im Text genannte Bedingung, dass es keinen Regen gegeben habe, ein Gleichbleiben des Messwerts von einem Tag auf den nächsten bedeutet. Sodann ist im Graphen abzulesen, von welchem Tag auf den nächsten die Messwerte auf gleicher Höhe bleiben bzw. die gestrichelte Verbindungslinie waagrecht verläuft.

Mögliche **Fehler** können hier auftreten, wenn die Umsetzung der Bedingung in eine Beziehung zwischen aufeinander folgende Messwerte nicht gelingt und die Antwort falsch geraten oder ausgelassen wird. Eine **Diagnose**, auf welche Ursachen falsche Antworten zurückzuführen seien, kann jedoch in der Regel erst auf Grund von nachträglichen Gesprächen gestellt werden.

In Teil **b)** gilt es zuerst zu erkennen, dass der Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Messwerten 10 mm betragen muss. Diese Erkenntnis kann zweckmäßig in die Bedingung übersetzt werden, dass zwei aufeinander folgende Messpunkte um zwei Hilfslinienabstände nach oben springen müssen. Alternativ hierzu können natürlich auch abgelesene Zahlenwerte verglichen werden.

Als **Fehler** sind unvollständige oder falsche Ankreuzungen zu erwarten. Ursachen hierfür können Übertragungsfehler sein, indem zwar richtig erkannt wird, ob der Abstand der Messwerte 10 mm beträgt oder nicht, aber im Antwortfeld in einer falschen Zeile angekreuzt wird. Eine **Diagnose** von Fehlerursachen wird aber in der Regel aus den Ankreuzungen allein nicht möglich sein, sondern erst aus Erfahrungen mit Übungsaufgaben im nachfolgenden Unterricht hervorgehen können.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht oder nur teilweise lösen konnten**, bieten sich zunächst Aufgaben an, die sich auf Teilaspekte beschränken:

- Übersetzungen zwischen Textaussagen und Messwerten,
- Übersetzungen zwischen Messwerten und ihrer grafischen Darstellung,
- direkte Übersetzungen zwischen Textaussagen und grafischen Darstellungen,
- Interpretation der Messdaten.

An Hand der dargestellten Regenmessungen könnten z. B. folgende Aufgaben gestellt werden:

- An welchem Tag hat Svea den Messwert 30 mm abgelesen?
- Am Donnerstag betrug der Messwert 25 mm, zwei Tage später war der Messwert um 15 mm gestiegen. Welcher Messwert an welchem Tag ergibt sich aus dieser Information?
- Lies aus der Grafik den höchsten Messwert ab.
- Zwischen welchen Tagen hat es am meisten geregnet? Begründe.

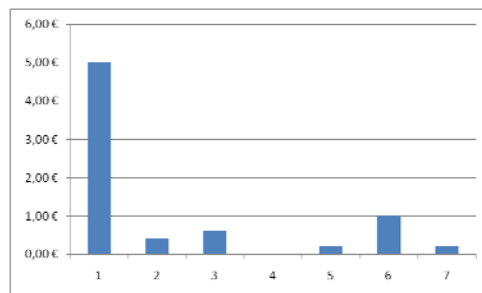
Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, können zur Steigerung der Kompetenz im Kommunizieren auch Fragestellungen über Aussagequalitäten von Darstellungen thematisiert werden:

- Nico hat eine Spardose geschenkt bekommen. An jedem Abend notiert Nico, wie viel Geld er in die Spardose steckt, und wie viel Geld in ihr enthalten sein müsste.

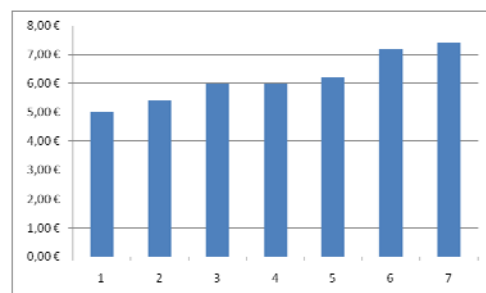
Tag Nr.	Hineingesteckt	Enthalten
1	5,00 €	5,00 €
2	0,40 €	5,40 €
3	0,60 €	6,00 €
4	nichts	6,00 €
5	0,20 €	
6	1,00 €	
7	0,20 €	

- a) Am 5. Tag hatte Nico seine Eintragungen in der letzten Spalte unterbrochen. Vervollständige die Tabelle.
- b) An welchen Tagen hat Nico weniger als 60 ct in die Spardose hineingesteckt?
- c) Nico möchte eine Kontrollrechnung durchführen. Er addiert alle Geldbeträge, die er in der zweiten Spalte eingetragen hat.
 - c1) Wie kann er die berechnete Summe zur Kontrolle seines Sparergebnisses verwenden?
 - c2) Entscheide, ob auch die Summe der Beträge in der vervollständigten 3. Spalte zur Kontrolle genutzt werden könnten, und begründe deine Entscheidung.
- d) Nico versucht, durch Diagramme sein Sparverhalten zu veranschaulichen. Er erstellt die folgenden Grafiken.

Einzahlungen



Inhalt

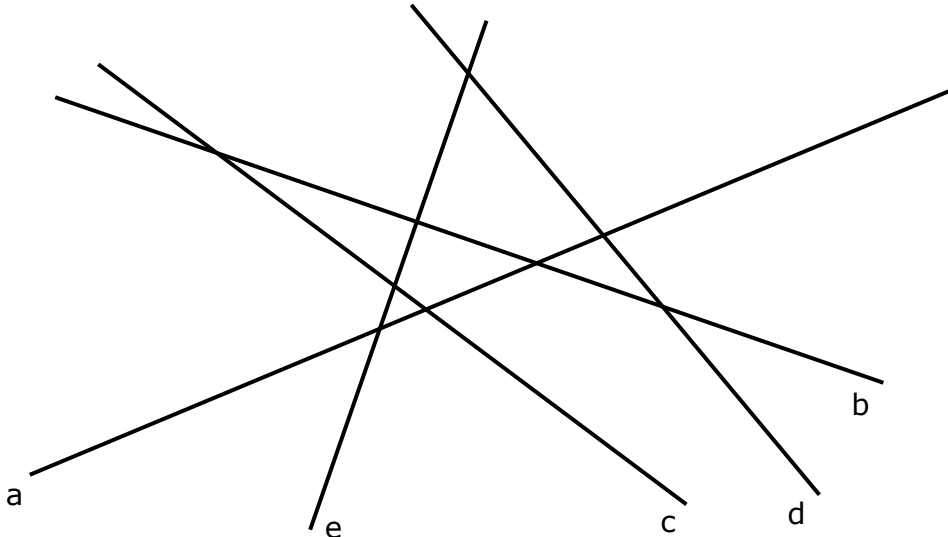


Welches Diagramm stellt welche Information besonders heraus?
Begründe.

Aufgabe 7: Lagebeziehungen von Geraden

Aufgabe

Genau zwei der Geraden a, b, c, d und e stehen senkrecht aufeinander. Kreuze an.



a und b

☐

a und c

☐

a und e

☐

b und e

☐

d und a

☐

Lösung

a und b

☐

a und c

☐

a und e

☐

b und e

☒

d und a

☐

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die Lage der dargestellten Geraden paarweise gedanklich und erkennen inhaltlich die Orthogonalität (stehen senkrecht aufeinander) der beiden Geraden b und e in der Abbildung. Sie wählen die richtige Antwortmöglichkeit (L3, K4, AB II).

Ursachen für **Fehler** können sein:

- Die Schülerinnen und Schüler kennen die Eigenschaft der Orthogonalität (stehen senkrecht aufeinander) nicht und besitzen auch keine Vorstellung davon.

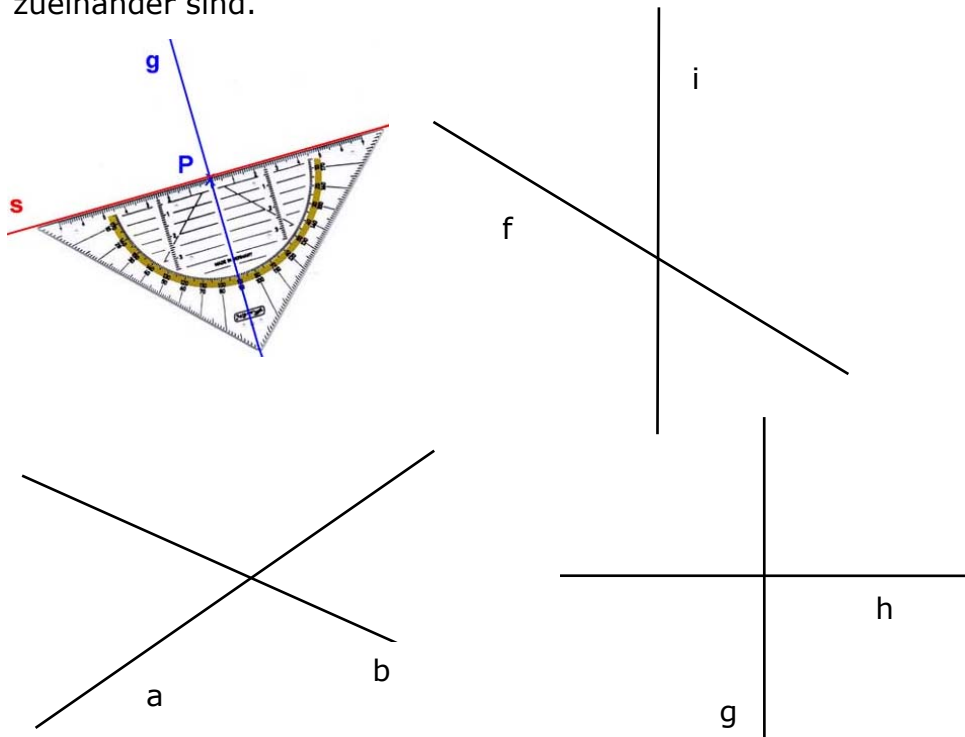
- Das ungenaue Lesen der Aufgabenstellung („Genau zwei der Geraden ...“) kann zu Mehrfachnennungen führen.
- Die Schülerinnen und Schüler lassen sich durch die vielen ineinander laufenden Geraden verwirren oder nennen auch „ungefähr“ senkrechte Geradenpaare, die geforderte Zeichengenauigkeit wird vernachlässigt.

Für die **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Lösung zu erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe hatten, sollten im Unterricht zuerst die Lagebeziehung „senkrecht zueinander“ von nur zwei Geraden noch einmal unter Verwendung des Geodreiecks erarbeiten und festigen.

- Überprüfe mit Hilfe des Geodreiecks ob die folgenden Geraden senkrecht zueinander sind.



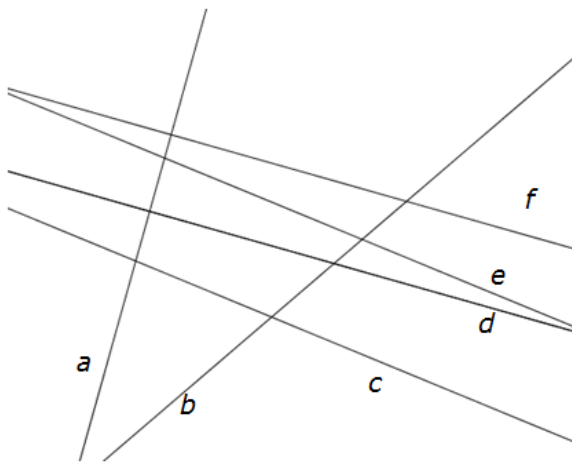
- Zeichne zwei Geraden
 - a) die senkrecht zueinander sind,
 - b) die sich schneiden, aber nicht senkrecht zueinander sind.

Nach der Betrachtung dieser Fälle kann eine dritte Gerade hinzugenommen und weiter differenziert werden:

- Zeichne drei Geraden so, dass genau zwei der Geraden senkrecht zueinander sind.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, bietet sich an, komplexere Anordnungen von Geraden nach den Lagebeziehungen der Orthogonalität und Parallelität zu untersuchen.

- Zeichne vier Geraden so, dass jeweils genau zwei der Geraden senkrecht zueinander sind.
- Gib an, welche Geraden zueinander senkrecht und welche Geraden zueinander parallel sind.



Wie dabei systematisch vorgegangen werden kann, um keine Relation zu vergessen, sollte thematisiert werden.

	a	b	c	d	e	f
a				?		?
b						
c					?	
d	?					?
e			?			
f	?			?		

Aufgabe 8: Turm aus Bausteinen

Aufgabe

Drei gleiche quaderförmige Bausteine haben jeweils die folgenden Maße:

- 30 cm Länge,
- 20 cm Breite und
- 10 cm Höhe (Tiefe).

Sie werden zu einem Turm aufeinander gestellt.

a) Wie hoch ist ein Turm aus den drei Bausteinen mindestens?

Der Turm ist mindestens _____ cm hoch.

b) Welche Turmhöhe ist mit den drei Steinen **nicht** möglich? Kreuze an.

- ☐ 100 cm
- ☐ 80 cm
- ☐ 70 cm
- ☐ 60 cm
- ☐ 40 cm

Lösung

a) 30

- b) ☒ 100 cm
- ☐ 80 cm
 - ☐ 70 cm
 - ☐ 60 cm
 - ☐ 40 cm

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2) Raum und Form (L3)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6) (nur bei a)
Anforderungsbereich	a) AB I b) AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Aufgabenteil a)

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen dem Text die geometrische Form sowie die Maße eines Bausteins und sie interpretieren das Wort „mindestens“ (K6). Die Problemstellung erfordert, dass sie heuristische Hilfsmittel und Strategien nutzen und dabei gedanklich mit den Maßen des Bausteins operieren, um diejenige Lage zu finden, bei der die Höhe des Bausteines am geringsten ist (L2, L3, K2).

Aus der minimalen Höhe jedes der drei Bausteine wird die gesuchte Höhe des Turms bestimmt (K5, AB I).

Die Schülerinnen und Schüler können auch von einer Skizze des Turmes ausgehen, um seine Höhe zu ermitteln.

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht erkennen, dass die minimale Turmhöhe (Mindesthöhe) bestimmt werden soll. Ebenso könnte es sein, dass sie nicht alle drei Steine verwenden.

Zur detaillierten **Diagnose** können die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise im Unterricht erläutern.

Aufgabenteil b)

Zur Lösung des vorliegenden Problems nutzen die Schülerinnen und Schüler heuristische Hilfsmittel und Strategien, wobei sie gedanklich mit geometrischen Objekten operieren (L3, K2). Sie überprüfen dabei, ob sich die vorgegebenen Turmhöhen aus Kombinationen der Kantenlängen ergeben (L2). Dazu bilden die Schülerinnen und Schüler Summen aus jeweils drei Steinhöhen (K5). Der Lösungsvorgang ist mehrschrittig (AB II).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler jeweils alle drei Bausteine in der gleichen Lage betrachten, also nicht erkennen, dass sich jeder Baustein in einer anderen Lage befinden kann.

Es ist ebenfalls möglich, dass Sie nicht beachten, dass genau drei Bausteine zu verwenden sind. Es sind dann alle Turmhöhen möglich.

Werden mehrere Auswahlmöglichkeiten angekreuzt, haben die Schülerinnen und Schüler aus der Fragestellung nicht entnommen, dass nur eine Turmhöhe nicht möglich ist.

Für die **Diagnose** der Fehlerursache ist es hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen im Unterricht erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgaben nicht lösen konnten, sollten zunächst auf der gegenständlichen Ebene aus drei oder mehreren gleichen quaderförmigen Bausteinen Türme bauen und jeweils die Höhe der Türme bei unterschiedlicher Lage der Bausteine aus vorgegebenen Kantenlängen ermitteln.

Bezüglich der Aufgabe b) kann es hilfreich sein, vorgegebene Zahlen als Summe aus drei Summanden darzustellen. Dabei sollten die möglichen Summanden so zur Auswahl angeboten werden, dass mehrere Varianten für die Summenbildung bestehen.

Für den Unterricht bieten sich auch die folgenden Aufgabenstellungen an:

- Bei einem Spielwürfel sind alle Kantenlängen 1 cm lang.
 - Stelle 10 Spielwürfel aufeinander. Wie hoch wird der Spielwürfelturm?
 - Gibt es weitere Turmhöhen, wenn du diese 10 Spielwürfel aufeinander stellst?

- Die Bausteine des Spieles „Wackelturm“ haben die Kantenlängen $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ und $c = 1 \text{ cm}$.
 - Lege 10 Bausteine mit der größten Fläche nach unten aufeinander. Wie hoch wird der Turm?
 - Stelle die Bausteine auf die kleinste Fläche. Wie hoch wird der Turm, wenn 4 Bausteine in dieser Lage aufeinander gestellt werden?
- Hans und Lise spielen mit Würfeln aus Holz. Es gibt zwei unterschiedliche Größen. Der eine Würfel hat eine Kantenlänge von 5 cm, der andere eine Kantenlänge von 6 cm. Hans stapelt alle Würfel mit 6 cm Kantenlänge, Lise alle mit einer Kantenlänge von 5 cm aufeinander. Lise hat 20, Hans nur 17 Würfel.
Wessen Turm wird höher?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgaben lösen konnten, können weitere Aufgabenvariationen zum „Wackelturm“ bearbeiten, bei denen die Bausteine jeweils in verschiedenen Lagen verwendet werden.

z. B.:

- Welche Türmhöhen sind theoretisch möglich, wenn man 10 Bausteine hat? Gib 5 Möglichkeiten an.

oder:

- Postpakete können die in der Tabelle angegebenen Abmessungen haben.

Größe	Länge in mm	Breite in mm	Höhe in mm
1	250	175	100
2	350	250	120
3	400	250	150
4	500	300	200

- Wie viele Kartons der Größe 1 passen höchstens in einen Karton der Größe 4?
- Wie viele Kartons der Größe 2 passen höchstens in einen Karton der Größe 4?

oder:

- Ayla und Ahmed spielen mit einem Kartenspiel, bei dem auf jeder Karte eine Zahl zu lesen ist. Folgende Karten liegen vor ihnen:

7	14	3	26	8
---	----	---	----	---

Sie bilden die Summe der Zahlen von jeweils zwei Karten.
Markiere die Zahlen, die dabei als Summe **nicht** vorkommen können.

21	17	25	11	15	24
33	10	9	16	28	32
22	12	18	39	14	27

Aufgabe 9: Tiersammlung

Aufgabe

Florian hat lange Zeit Holztiere gesammelt. Jetzt will er sie verschenken.

Die Hälfte der Holztiere bekommt Jan.

Ein Drittel der Holztiere erhält Joschi.

Für seine Schwester bleiben dann noch 24 Holztiere übrig.

Wie viele Holztiere hatte Florian?

Florian hatte _____ Holztiere.

Lösung

144

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erfassen die Formulierungen „die Hälfte der Holztiere“, „ein Drittel der ...“ sowie „... bleiben dann noch 24 Holztiere übrig“ und erstellen daraus ein mathematisches Modell der gegebenen Realsituation (K3). Sie benötigen Sinn tragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen (L1). Zur Lösung der Aufgabe ist eine geeignete Strategie (Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten, systematisches Probieren) auszuwählen und anzuwenden (K2), wobei unterschiedliche Lösungswege möglich sind.

- Das Addieren der Bruchanteile $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ergibt, dass $\frac{5}{6}$ aller Holztiere Jan und Joschi erhalten. Damit bekommt Florians Schwester $\frac{1}{6}$ aller Holztiere (24 Stück). Mit dieser Erkenntnis kann auf das Ganze geschlossen werden: $24 \cdot 6 = 144$ (K5).
- Ausgehend von den restlichen 24 Holztieren kann durch schrittweises Verdoppeln und danach Verdreifachen (oder umgekehrt) auf die Gesamtanzahl von 144 geschlossen werden (K5).
- Mit der Erkenntnis, dass die Gesamtzahl durch 2 und 3 teilbar sein muss und ein Rest von 24 bleibt, kann durch systematisches Probieren die Zahl 144 als die gesuchte identifiziert werden (K5).

Die vorliegende Aufgabenstellung stellt für Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe ein anspruchsvolles Problem dar (AB III).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler keine passende Bearbeitungsstrategie für diese Aufgabe finden. Dabei können Schwierigkeiten beim Erfassen des Aufgabentextes oder das Fehlen Sinn tragender Vorstellungen von gebrochenen Zahlen mögliche Ursachen sein.

Bei fehlendem Verständnis für die zu modellierende Realsituation wird vermutlich eher die Aufgabe unbearbeitet bleiben. Es ist nicht ausgeschlossen, dass Schülerinnen oder Schüler versuchen, das Ergebnis durch Raten zu bestimmen, wenn sie die Aufgabenstellung mathematisch nicht durchdrungen haben.

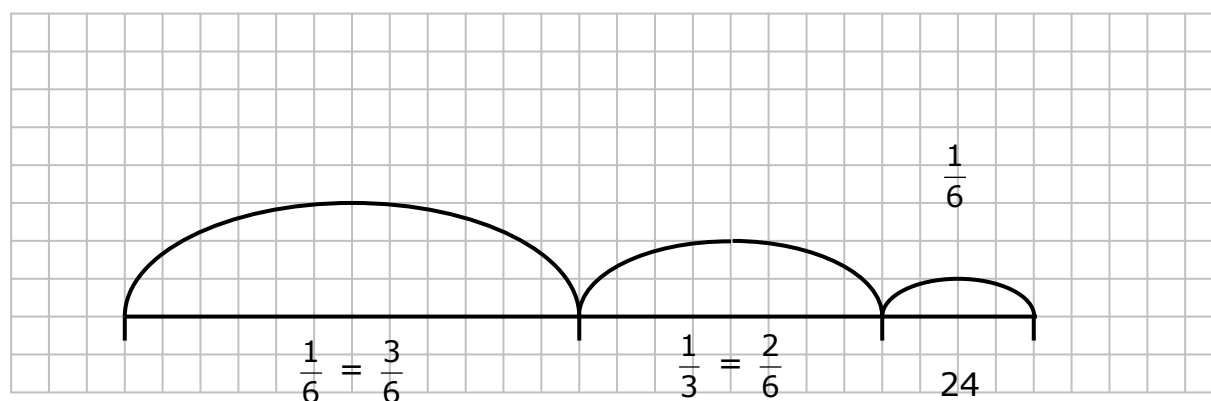
Zur **Diagnose** empfiehlt sich sowohl eine Betrachtung vorhandener Lösungsnotizen als auch ein Gespräch mit den Schülerinnen und Schülern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Den **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, sollten Hilfen zu Anwendung heuristischer Strategien (Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, systematisches Probieren mit und ohne Tabelle, ...) angeboten werden, die zur Analyse und Lösung derartiger Sachverhalte führen. Zur Unterstützung können z. B. folgende Aufforderungen dienen:

- Formuliere die Aufgabenstellung mit eigenen Worten.
- Markiere im Text Wörter, die du nicht verstanden hast.
- Übersetze den Text in Bilder (Tabellen, Skizzen, ...).

Die Übersetzung in ein mathematisches Modell kann schrittweise nachvollzogen und über bildliche Darstellungen des Sachverhaltes veranschaulicht werden.



Die Schülerinnen und Schüler können danach angeregt werden, ähnliche Aufgabenstellungen zu veranschaulichen und zu lösen, wie:

- Tino hat zum Geburtstag eine große Tüte Bonbons geschenkt bekommen. Als er seinen Freund besucht nimmt er $\frac{1}{3}$ der Bonbons mit, die restlichen 36 Bonbons behält er. Wie viele Bonbons waren ursprünglich in der Tüte?
- Ein Viertel seines Taschengeldes gibt Christoph für sein Handy aus. Ein Viertel spart er und es bleiben noch 10 € übrig. Ermittle die Höhe von Christophs Taschengeld.

- Die Hälfte aller Autos, die auf einem Parkplatz stehen, ist schwarz. Ein Viertel aller Autos ist weiß und die restlichen 25 Autos sind rot. Ermittle, wie viel Autos insgesamt auf dem Parkplatz stehen.
- Wochentags verkehren am Frankfurter Hauptbahnhof 560 Züge. Samstags sind es $\frac{1}{5}$ weniger Züge. Sonntags fahren nur $\frac{7}{10}$ der Züge.
 - a) Ermittle, wie viel Züge am Samstag fahren.
 - b) Vergleiche die Anzahl der fahrenden Züge vom Samstag mit denen vom Sonntag. Gib an, wie viel Züge sonntags weniger als samstags fahren.

Für Schülerinnen und Schüler, die Probleme beim Bruchrechnen hatten, können einfache Aufgaben zur Addition und Subtraktion von Brüchen angeboten werden. Gegebenenfalls kann es auch sinnvoll sein, das Erweitern noch einmal zu wiederholen.

- Berechne.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \quad \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \quad \frac{7}{8} - \frac{1}{6} = \quad \frac{5}{7} + \frac{4}{9} =$$
- Erweitere die Brüche mit 3.

$$\frac{2}{5} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{3}{13}$$

Mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, ist die Bearbeitung von Aufgabenstellungen mit höherem Schwierigkeitsgrad (Zahlenwerte, notwendige Bearbeitungsschritte, selbstständige Formulierung der Fragestellung) möglich, z. B.:

- Ein Fünftel aller Obstbäume auf einer Wiese sind Pflaumenbäume, ein Viertel sind Birnenbäume und ein Drittel Apfelbäume. Die restlichen 26 sind Pfirsichbäume. Ermittle, wie viel Obstbäume auf der Wiese stehen.

Aufgabe 10: Schokotraum

Aufgabe

Auf der Verpackung eines Schokoriegels entdeckt Lisa eine Tabelle mit den Nährwertangaben.

Schokotraum	enthält je 100 g	je Riegel (21 g)
Brennwert	2289 kJ / 548 kcal	481 kJ / 117 kcal
Eiweiß	10 g	2,1 g
Kohlenhydrate	52 g	10,9 g
Fett	34 g	7,1 g
Vitamine und Mineralstoffe je 100 g		
Vitamin B ₂	0,55 mg = 34 % (RDA)*	
Vitamin B ₃	1,2 mg = 19 % (RDA)*	
Vitamin B ₁₂	0,88 µg = 88 % (RDA)*	
Calcium	323 mg = 40 % (RDA)*	
Phosphor	280 mg = 35 % (RDA)*	
* Prozentsatz der empfohlenen Tagesmenge		

Wie viel Gramm Fett nimmt Lisa zu sich, wenn sie 2 Schokoriegel nascht?

Lisa nimmt _____ g Fett zu sich.

Lösung

14,2

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen die für die Aufgabe relevante Information aus der Nährwerttabelle (K4, K6). Diese ist den Schülerinnen und Schülern nicht unmittelbar vertraut und beinhaltet einen erheblichen Datenüberschuss (AB II). Sie erkennen, dass ein quantitativer Zusammenhang zwischen der Anzahl der verzehrten Schokoriegel und der Menge der einzelnen aufgenommenen Bestandteile Grundlage der Aufgabe ist. Das nutzend bestimmen sie die aufgenommene Fettmenge (L4).

Fehler werden auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht den richtigen Wert in der Nährwerttabelle finden oder den quantitativen Zusammenhang zwischen der Anzahl der verzehrten Schokoriegel und der Menge der aufgenommenen einzelnen Bestandteile nicht erkennen. Sie gelangen zum falschen Ergebnis „68 g“, wenn sie die Angabe des Fettgehaltes für 100 g verdoppeln.

Zur **Diagnose** der Fehlerursache kann die Lehrkraft einen ggf. notierten Rechenweg der Schülerinnen und Schüler analysieren oder sich ihre Überlegungen erläutern lassen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst einfache Ableseaufgaben aus Tabellen erhalten, z. B.:

Nährwert und Bestandteile von Fleischsorten (Ausschnitt)

Lebensmittel (je 100 g)	Eiweiß (g)	Kohlenhydrat (g)	Fett (g)	Kochsalz (mg)	Kilokalorien
Brat Poulet	20.60		5.60	83.00	133.00
Ente	18.10		17.20	85.00	227.00
Gans	15.70		31.00	85.00	342.00
Hase	21.60		3.00	50.00	112.00
Hirsch	20.60		3.30	70.00	112.00
Kalbsbrust	18.60		6.30	105.00	130.00
Kalbsherz	15.90	1.00	5.10	120.00	115.00
Kalbshirn	10.10	0.50	7.60	172.00	110.00
Kalbskeule	20.70		1.60	86.00	100.00
Kalbskotelett	21.10		3.10	93.00	110.00
Kalbsleber	19.20	4.10	4.10	84.00	130.00
Kalbsniere	16.70	0.80	6.40	200.00	125.00
Kalbsschnitzel	20.70		1.80	83.00	100.00
Pute Brust	22.80		0.90	66.00	99.00
Pute Herz	17.30	1.80	5.30	111.00	124.00
Pute Keule	20.60		3.10	95.00	110.00
Rinder Tartar	21.20		3.70	43.00	120.00
Rinderfilet	19.20		4.40	51.00	115.00

Quelle: <http://www.modernbeauty.de/ernaehrung/bestandteile-der-ernaehrung/ernaehrungstabelle-fleisch.html>

- Fragestellungen hierzu könnten lauten:
 - Lies den Anteil an Fett in 100 g Rinderfilet ab.
 - Wie viel Kilokalorien enthält 100 g Gans?
 -

Anschließend können leichte Aufgaben zu proportionalen Zuordnungen gelöst werden, z. B.:

- Wie viel Gramm Fett nehme ich zu mir, wenn ich 200 g Kalbsleber esse?
- Welche Fleischsorte hat pro 100 g den höchsten Fettanteil?
- Bei welchem Produkt nehme ich 210 mg Kochsalz zu mir, wenn ich ein 200 g Stück davon esse?
- ...

Weiterhin können einfache Tabellen vervollständigt werden, wie:

- Preise für Äpfel

Anzahl	€
4	3,60
	5,40
13	
	19,80
51	
	58,50

- Preise für Holsteiner Katenrauchschinken

g	€
100	2,70
	5,40
400	
	24,30
1000	
	20,25

- Wechselkurs € in US \$ (Stand 05. Oktober 2011)

€	US \$
0,75	1
	2
4,50	
	9
8,25	
56,25	

Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten anspruchsvollere Aufgaben zum Ablesen aus Tabellen und zu Zuordnungen aus ihrer Umwelt angeboten werden, z. B.:

- Preisvergleichstabelle für das *Handy „Fabertasche 0815“*

Produktbezeichnung 	Preis	Lieferzeit	Versandkosten	Anbieter
Handy „Fabertasche 0815“	559,95 €	2 Wochen	2,50 €	Annodunnemals
Handy „Fabertasche 0815“	555,30 €	30 Tage	-	SCHNELLZUG
Handy „Fabertasche 0815“	527,65 €	14 Tage	1,45 €	Klapperstorch
Handy „Fabertasche 0815“	579,90 €	6 Tage	6,90 €	HANDYTECHNIK
Handy „Fabertasche 0815“	528,36 €	10 Tage	9,99 €	Habealles
Handy „Fabertasche 0815“	527,91 €	1 Woche	-	Telefonisi
Handy „Fabertasche 0815“	541,95 €	7 Tage	5,99 €	Mobiler
Handy „Fabertasche 0815“	493,13 €	6 Monate	35,00 €	Guten Tag
Handy „Fabertasche 0815“	555,30 €	1 Tag	19,99 €	<i>Hallo</i>
Handy „Fabertasche 0815“	559,95 €	1 Monat	-	Heißes Ohr

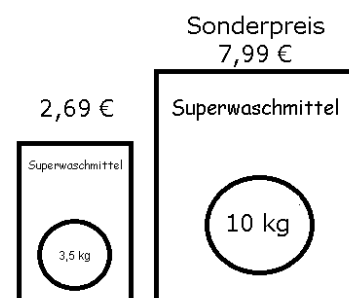
Aufgabenstellungen zu der Tabelle könnten sein:

- Welcher Anbieter bietet den günstigsten Preis für das Handy an?
- Bei welchen Anbietern gibt es den günstigsten Versandpreis?
- Wo gibt es das günstigste Angebot (Preis plus Versand)?
- Bei welchem Anbieter ist die Lieferzeit am längsten?
- ...

Aufgabenbeispiele zu Zuordnungen:

- Die Tropfen eines gleichmäßig tropfenden Wasserhahns werden in einem Gefäß gesammelt. In einer Stunde sammelt sich im Gefäß eine Füllhöhe von 5 cm. Bei einer Füllhöhe von 20 cm ist 1 Liter Wasser „vertropft“. Wie viel Liter Wasser sind in einem Tag (24 Stunden), in einer Woche, in einem Monat (30 Tage) vergeudet worden?
- Die Werbung verspricht:
Heute günstiges Angebot: 10 kg Waschmittel nur 7,99 €.

Frau Müller geht in das Geschäft, das dieses Angebot hat. Sie findet in demselben Regal 3,5 kg-Pakete mit einem Preis von 2,69 € je Paket. Frau Müller möchte günstig einkaufen. Welches Angebot sollte sie nutzen? Begründe!



Aufgabe 11: Zoobesuch

Aufgabe

An ihrem 12. Geburtstag möchte Sarah zusammen mit ihren Eltern und Geschwistern den Zoo besuchen.
Sarah hat eine 9-jährige Schwester und einen 21-jährigen Bruder, der studiert.
Wie viel muss die Familie für den Eintritt bezahlen, wenn sie die günstigste Variante für den Eintrittspreis wählt?

Eintrittspreise für Tageskarten

Erwachsene	13,00 €
Ermäßigungsberechtigte (Schüler, Berufsschüler, Studenten, Zivil- und Wehrdienstleistende)	11,00 €
Kinder von 4 - 14 Jahren	9,00 €
Eltern-Kind-Karte (ein oder beide Elternteile und ihre Kinder bis 14 Jahre)	34,00 €

Die Familie muss _____ € für den Eintritt bezahlen, wenn sie die günstigste Variante wählt.

Lösung

45 (bzw. 45,00)

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen Informationen aus der Preistabelle, interpretieren diese und führen mit Größen einfache Berechnungen durch (L2, K5, K6). Dabei ist es erforderlich, die Situation in mathematische Sprache zu übersetzen (K3). Durch Erkennen beider Möglichkeiten, der Preisberechnung und des Vergleichens (K2), finden sie heraus, dass sich der günstigste Gesamtpreis (45,00 €) aus einer Eltern-Kind-Karte für die Eltern, Sarah und Sarahs Schwester (34,00 €) und einer Karte für Ermäßigungsberechtigte für den Bruder (11,00 €) zusammensetzt. Die Preistabelle ist den Schülerinnen und Schülern nicht unmittelbar vertraut und die relevanten Informationen müssen aus den verschiedenen Angaben zusammengesucht werden (AB II).

Fehler können auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage sind, die Informationen der Preistabelle sachgerecht aufzunehmen. Einen falschen Gesamtpreis in Höhe von 55,00 € ermitteln sie, indem sie die Einzelpreise für die fünf Personen zusammenrechnen (zwei Erwachsene, zwei Kinder, ein Ermäßigungsberechtigter). Möglich wäre auch eine Preisannahme von 9,00 € für den studierenden Bruder, so dass ein Gesamtpreis von 53,00 € entsteht. Weiterhin könnte auch die Familienkarte als ausreichend angenommen werden, weil der studierende Bruder mit in die Kinderzahl der Familie gezählt wird, so dass ein Gesamtpreis von 34,00 € entsteht.

Zur **Diagnose** der Fehlleistung sollten die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen beim Lösen der Aufgabe erläutern oder zusammen mit dem Lehrer den Lösungsweg nachvollziehen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten sollten zunächst Aufgaben erhalten, bei denen aus Tabellen Informationen entnommen werden müssen. Dazu eignen sich z. B. Fahrpläne wie der folgende:

404

Meißen - Cossebaude

Verkehrsgesellschaft Meißen mbH

Tarifzonen: Meißen / Nossen

Linie verkehrt am 24. und 31.12. wie samstags!

Verkehrstage		Montag - Freitag														
Fahrtnummer		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	
Verkehrshinweise						S	F			S	F	S	F			
Meißen, Busbahnhof / 8		ab	4:35	5:25	6:20	7:30	9:05	9:05	11:45	13:10	13:10	14:00	14:00	15:00	16:52	18:25
--- Bahnhofstraße			4:37	5:27	6:22	7:32	9:07	9:07	11:47	13:12	13:12	14:02	14:02	15:02	16:54	18:27
--- Altstadtbrücke			4:38	5:28	6:23	7:33	9:08	9:08	11:48	13:13	13:13	14:03	14:03	15:03	16:55	18:28
--- Talbad										13:14		14:04				
--- Neumarkt										13:15		14:05				
--- Schiffsgaststätte			4:40	5:30	6:25	7:35	9:10	9:10	11:50	13:17	13:15	14:07	14:05	15:05	16:57	18:30
Batzdorf, Rehbockschänke			4:42	5:32	6:27	7:37	9:12	9:12	11:52	13:19	13:17	14:09	14:07	15:07	16:59	18:32
Scharfenberg, Schachtberg			4:45	5:35	6:30	7:40	9:15	9:15	11:55	13:22	13:20	14:12	14:10	15:10	17:02	18:35
--- Heimatmuseum					6:32			9:17	11:57			14:14	14:12	15:12		
--- Wendeplatz					6:33			9:18	11:58			14:15	14:13	15:13		
--- Arztpraxis					6:34			9:19	11:59			14:16	14:14	15:14		
Naustadt, Dorfmitte					6:35			9:20	12:00			14:17	14:15	15:15		
--- Neuer Anbau					6:37			9:22	12:02			14:19	14:17	15:17		
Pegenau, Eichberg					6:39			9:24	12:04			14:21	14:19	15:19		
Gauernitz, Gasthaus			4:48	5:38	6:42	7:43	9:18	9:27	12:07	13:25	13:23	14:24	14:22	15:22	17:05	18:38
--- Verkaufsstelle			4:49	5:39	6:43	7:44	9:19	9:28	12:08	13:26	13:24	14:25	14:23	15:23	17:06	18:39
Wildberg			4:51	5:41	6:45	7:46	9:21	9:30	12:10	13:28	13:26	14:27	14:25	15:25	17:08	18:41
Wildberg, Siedlung			4:52	5:42	6:46	7:47	9:22	9:31	12:11	13:29	13:27	14:28	14:26	15:26	17:09	18:42
Niederwartha, Haltepunkt			4:54	5:44	6:48	7:49	9:24	9:33	12:13	13:31	13:29	14:30	14:28	15:28	17:11	18:44
Linie 94 nach Dresden				5:54			9:44	9:44	12:24	13:44	13:44	14:44	14:44	15:39	17:24	
--- Oberwarthaer Straße			4:56	5:46	6:50	7:51	9:26	9:35	12:15	13:33	13:31	14:32	14:30	15:30	17:13	18:46
--- Hermann-Große-Straße			4:57	5:47	6:51	7:52	9:27	9:36	12:16	13:34	13:32	14:33	14:31	15:31	17:14	18:47
--- Amselgrund			4:58	5:48	6:52	7:53	9:28	9:37	12:17	13:35	13:33	14:34	14:32	15:32	17:15	18:48
Cossebaude, Winkelwiesen			4:59	5:49	6:53	7:54	9:29	9:38	12:18	13:36	13:34	14:35	14:33	15:33	17:16	18:49
--- E.-Berger-Straße			5:00	5:50	6:54	7:55	9:30	9:39	12:19	13:37	13:35	14:36	14:34	15:34	17:17	18:50
Linie 94 nach Dresden			5:05		6:56	8:08	10:08	10:08								19:08
--- Bahnhof		an	5:01	5:51	6:55	7:56	9:31	9:40	12:20	13:38	13:36	14:37	14:35	15:35	17:18	18:51
Verkehrshinweise																
Erklärungen																
S : verkehrt nur an Schultagen										F : verkehrt nur in						
So : verkehrt nur Sonntag										ALB : ALB muß unter						

Zunächst könnte man eine Analyse der Tabelle vornehmen, damit die Schüler systematisch an das Lesen von Tabellen herangeführt werden, z. B.:

- Worüber gibt die Tabelle Auskunft?
- Welche Informationen sind in der ersten Spalte zu finden?
- Welche Informationen enthalten die weiteren Spalten?
- ...

Danach können verschiedene Ableseaufgaben gegeben werden, z. B.:

- Wann fährt der früheste Bus vom Bahnhof Meißen ab?
- Wann fährt der späteste Bus vom Bahnhof Meißen ab?
- Wie lange fährt der Bus, der um 11:45 Uhr vom Bahnhof Meißen abfährt, bis nach Naustadt, Dorfmitte?
- ...

Es eignen sich auch Tabellen, aus denen Daten entnommen werden, die vergangene und zukünftige Situationen beschreiben. So aus der folgenden Tabelle zur Entwicklung der Weltbevölkerung:

Spiegel online Wissenschaft, 10.07.2009

Weltbevölkerung (in Millionen)							
	1950	1975	2000	2005	2010	2025	2050
Europa	547	676	727	729	733	729	691
Afrika	227	419	819	921	1033	1400	1998
Asien	1403	2379	3698	3937	4167	4773	5231
Australien	13	21	31	34	36	43	51
Lateinamerika	167	323	521	557	589	670	729
Nordamerika	172	242	319	335	352	398	448
Welt	2529	4061	6115	6512	6909	8012	9150
Quelle: Uno-World Population Prospects (2008 Revision), Statistisches Bundesamt							

- Wie viele Menschen lebten im Jahr 1950 in Europa?
- Wie viele Menschen werden voraussichtlich im Jahr 2050 in Australien leben?
- Wie viele Menschen werden voraussichtlich im Jahr 2025 in Lateinamerika und Nordamerika insgesamt leben?
- Wie viele Menschen werden voraussichtlich im Jahr 2050 auf der Welt insgesamt leben?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können komplexere Aufgaben bearbeiten, z. B. die folgenden:

- An der Kasse einer Schwimmhalle findet man die folgende Preistabelle:

Karte 1 Person	5 €
Kleingruppenkarte 8 Personen	38 €
Gruppenkarte 20 Personen	90 €

- Welchen Preis hat eine Gruppe von 4 Personen zu zahlen?
- Wie viele Karten bekommt man für 30 €?
- Für 30 Personen rechnet Frank einen Preis von 140 € aus. Maike meint, dass die Gruppe noch günstiger hineinkommen kann. Hat Maike recht? Begründe.
- Die Schwimmhallengesellschaft will eine Jahreskarte für 1 Person einführen. Was wäre ein angemessener Preis?

- Die folgende Tabelle stellt die Taxitarife für Dresden dar:

Grundpreis*	Tarifstufe 2 (5:00 Uhr bis 20:00 Uhr)		Tarifstufe 3 (20:00 Uhr bis 5:00 Uhr)	
	Kilometerpreis bis 3 Kilometer Fahrstrecke	Kilometerpreis ab dem 4. Kilometer Fahrstrecke	Kilometerpreis bis 3 Kilometer Fahrstrecke	Kilometerpreis ab dem 4. Kilometer Fahrstrecke
2,50 €	1,70 €	1,40 €	1,70 €	1,60 €

*Der Grundpreis ist immer zu bezahlen, er ist schon auf dem Taxameter angezeigt, wenn die Fahrt beginnt.

- Welchen Endpreis muss ein Fahrgast zahlen, der um 17:00 Uhr mit dem Taxi eine Strecke von 6 Kilometern fährt?
- Wie viel kostet eine Heimfahrt von der Semperoper um 23:00 Uhr, wenn eine Strecke von 12 Kilometern zu fahren ist?
- Ein Fahrgast bezahlt um 12:00 Uhr mittags einen Preis von 7,60 €. Wie viel Kilometer hat der Taxifahrer ihn gefahren?
- ...

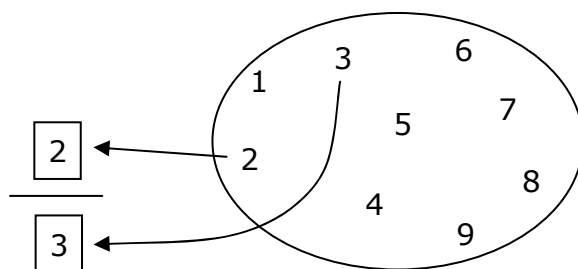
Aufgabe 12: Auswahl

Aufgabe

Es stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 zur Verfügung.

Für den Zähler eines Bruches wird eine dieser Zahlen ausgewählt und für den Nenner eine andere.

So erhältst du zum Beispiel den Bruch $\frac{2}{3}$:



Wähle Zähler und Nenner so aus, dass der Wert des Bruchs möglichst nahe an 1 liegt. Trage Zähler und Nenner im Antwortsatz ein.

Der Wert des Bruches $\frac{\square}{\square}$ liegt am nächsten an 1.

Lösung

$$\frac{8}{9}$$

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Bei dieser Aufgabe geht es vor allem um Vorstellungen über die Größe von Bruchzahlen (L1) und eine dementsprechende Auswahl von Zähler und Nenner (K2); sichere Kenntnisse über die inhaltliche Bedeutung eines Bruchs sind sowohl für diese Auswahl als auch für eine Vergewisserung, dass der Wert des Bruches möglichst nahe an 1 liegt, unerlässlich (K5). Das Vorgehen bei der Problemlösung ist mehrschrittig (AB II).

Um die Aufgabe zielstrebig zu lösen, können die Schülerinnen und Schüler sich einerseits überlegen, dass diejenigen Brüche nahe an 1 liegen, bei denen Zähler und Nenner benachbarte Zahlen sind, andererseits dass dann der Abstand von 1

durch einen Stammbruch mit gleichem Nenner gegeben ist. Häufig werden die Schülerinnen und Schüler die Größen einiger Brüche mit 1 verglichen, bevor sie diese zielführenden Erkenntnisse mehr oder weniger deutlich vor Augen haben; auf diesem Wege könnten sie dann u. a. dahin gelangen, den Wert des Bruches $\frac{8}{9}$ und den Wert des Bruches $\frac{9}{8}$ mit 1 zu vergleichen. Ein reines Durchprobieren der 72 möglichen Brüche hingegen hätte wegen des Umfanges der Rechnungen kaum Aussicht auf Erfolg.

Ein anderer zielstrebigere, aber kaum zu erwartender, Lösungsweg könnte von der 1 ausgehen, um sich durch Addition oder Subtraktion eines möglichst kleinen Bruches von der 1 zu entfernen. Dann wären die Erkenntnisse zielführend, dass der Stammbruch mit dem größtmöglichen Nenner, also $\frac{1}{9}$, den kleinsten Abstand von der 1 darstellt, und dass wegen der Notwendigkeit, das Ergebnis mit den Zahlen 1 bis 9 darzustellen, dieser Bruch nicht zur 1 addiert werden kann $\left(\frac{10}{9}\right)$, sondern von ihr subtrahiert werden muss $\left(\frac{8}{9}\right)$.

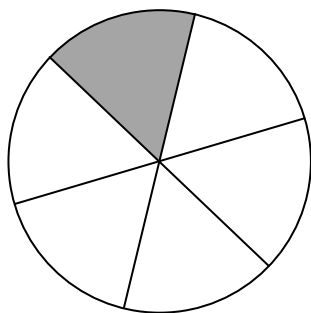
Als **Fehler** sind elementare Rechenfehler möglich. Häufiger ist aber als Ursache für ein Scheitern zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler nur einen Teil oder keine der zielführenden Gedanken herausfinden und ihre Bearbeitung entweder ohne Angabe des Ergebnisses oder mit einer Rate-Lösung beenden. Eine **Diagnose** dieser Ursache wird nur teilweise an Hand der Lösungsnotizen möglich sein, da die Aufgabe auch ohne Notizen weitgehend bearbeitet werden kann. Daher empfiehlt sich ggf. eine Nachbesprechung der Aufgabe im Unterricht.

Hinweise zur Weiterarbeit

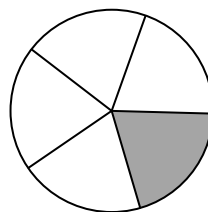
Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich zunächst Aufgaben an, die ein Sinn tragendes Verständnis von Brüchen fördern, bevorzugt mit Hilfe von Veranschaulichungen, die zu verbalisieren sind.

Zur Absicherung des Verständnisses, dass Stammbrüche umso kleiner sind, je größer ihr Nenner ist, mögen folgende Aufgaben dienen:

- Hier siehst du zwei Darstellungen von Anteilen in grauer Farbe.



A



B

- a) Nenne die Bruchzahlen, die diese dargestellten Anteile wiedergeben. Erkläre an der Abbildung.
- b) Drei Freunde diskutieren über die Größe der dargestellten Anteile.

Peter: Die graue Fläche in B ist kleiner als die graue Fläche in A. Daran sieht man, dass der in B dargestellte Anteil kleiner ist als der in A dargestellte Anteil.

Paul: Der Kreis in A ist in mehr Teile eingeteilt als der Kreis in B, deshalb ist der in A dargestellte Anteil größer als der in B dargestellte Anteil.

Pedro: Die graue Fläche in A passt öfter in den Kreis als die graue Fläche in B. Also ist der in A dargestellte Anteil kleiner als der in B dargestellte Anteil.

Untersuche für jeden der drei Freunde, ob er richtig argumentiert.
- c) Begründe, warum von zwei Stammbrüchen derjenige den kleineren Wert hat, der den größeren Nenner hat. Veranschauliche mit einer Abbildung.

Wenn die Grundvorstellungen über Größen der Stammbrüche gefestigt sind, bieten sich Aufgaben zum Vergleich von Brüchen mit gleichem Zähler an, zum Beispiel eine Aufgabenvariante zu c), in der ausgehend von Darstellungen der Bruchteile $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{5}$ die Begründung gefragt wird, warum von zwei Brüchen mit gleichem Zähler derjenige den kleineren Wert hat, der den größeren Nenner hat.

Wenn diese Grundvorstellungen gefestigt sind, können sich Übungen anschließen, in denen Summen bzw. Differenzen thematisiert werden:

- Begründe ohne Rechnung, welcher Term den kleineren Wert hat.

a) $1 + \frac{3}{4}$ oder $1 + \frac{3}{5}$?

b) $1 - \frac{3}{7}$ oder $1 - \frac{3}{8}$?

c) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$ oder $\frac{2}{3} - \frac{3}{8}$?

Zusatzfrage zu c):

Welcher der beiden Terme liegt auf dem Zahlenstrahl näher an $\frac{2}{3}$?

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, können durch Aufgabenstellungen weiter gefördert werden, die ebenfalls ohne Berechnungen, rein argumentativ zu lösen sind:

- Entscheide ohne Berechnung, welcher der beiden Brüche $\frac{8}{9}$ oder $\frac{9}{8}$ näher an 1 liegt, und begründe deine Entscheidung.

Aufgabe 13: Blutkreislauf

Aufgabe

Der Körper eines Menschen enthält pro Kilogramm Körpergewicht ungefähr 0,08 Liter Blut. Dieses Blut wird durch das Herz in einem geschlossenen Kreislaufsystem durch den Körper gepumpt.

Tobias hat ausgerechnet, dass sein Körper ungefähr 5,6 Liter Blut enthält. Wie viel wiegt Tobias?

Tobias wiegt ungefähr _____ kg.

Lösung

70

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler erkennen in der Aufgabe einen quantitativen Zusammenhang zwischen dem Körpergewicht (Masse in kg) und der Blutmenge eines Menschen (Volumen in l) (L4). Sie übertragen diesen in ein mathematisches Modell (Proportionalität, K3). Zur Lösung sind sichere Rechenfertigkeiten mit Dezimalzahlen erforderlich (K5). Durch die Umrechnung der Dezimalzahlen wird das Lösungsverfahren mehrschrittig (AB II).

Folgende **Fehler** können auftreten:

- Rechenfehler, insbesondere beim Arbeiten mit Dezimalzahlen,
- der quantitative Zusammenhang wird nicht als Proportionalität erkannt,
- die Übersetzung in mathematische Strukturen (Tabelle, Gleichung) gelingt nicht.

Um eine detaillierte **Diagnose** der Fehler zu ermöglichen, sollten die Schülerinnen und Schüler im Unterricht ihre unterschiedlichen Lösungsstrategien erläutern und begründen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, ist es empfehlenswert, Aufgaben zur Division und Multiplikation von Dezimalzahlen zu wiederholen.

- Löse die folgenden Aufgaben:
 $4,8 : 6 =$ $12 \cdot 4,0 =$
 $4,8 : 0,6 =$ $12 \cdot 0,4 =$
 $4,8 : 0,06 =$ $12 \cdot 0,0,4 =$

Weiterhin könnten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben mit proportionalen Zusammenhängen zu ähnlichen Sachverhalten aus ihrer Erfahrungswelt bearbeiten:

- Peter hilft seiner Großmutter bei der Gartenarbeit. Für eine Stunde erhält er 4,00 € Belohnung. Wie viel Geld verdient er, wenn er seiner Großmutter 3 Stunden im Garten hilft?
- Auf der gesamten Wandlänge von 3,60 m können 4 Bilder ohne Zwischenraum nebeneinander aufgehängt werden. Wie viele Bilder derselben Breite können auf der gesamten Wandlänge von 5,40 m, ebenfalls ohne Zwischenraum, aufgehängt werden?
- Der Preis für 5 Brötchen beträgt 1,00 €. Lege eine Tabelle für 1, 2, 3, 4, 5 und 10 Brötchen und dem jeweils zugehörigen Preis an.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten, können mehrschrittige Modellierungen zu proportionalen Zusammenhängen bearbeiten, z. B.:

- Der Eintritt ins Schwimmbad kostet für einen Erwachsenen in der ersten Stunde 2 € und jede weitere angefangene Stunde 80 Cent. Kinder bis 16 Jahre zahlen für jede Stunde 50 Cent.
 Familie Meyer hat zwei Kinder im Alter von 13 und 15 Jahren und überlegt am Eingang eine Familienkarte für 10 € zu kaufen. Allerdings kann die Familie nur $3\frac{1}{2}$ Stunden bleiben.

Ist es sinnvoll eine Familienkarte zu kaufen?

- Katharina verbringt ihren nächsten Sommerurlaub mit ihren Eltern auf der Insel Gran Canaria. Sie möchte wissen wie groß die Insel ist. Mit Hilfe der Landkarte kann sie die Entfernungen auf der Insel bestimmen.
 - Welchen Durchmesser hat die Insel, wenn man von einer Kreisform ausgeht?
 - Stelle Fragen die Katharina noch mit Hilfe der Karte beantworten könnte.



Quelle: <http://maps.google.de/maps?q=Gran+Canaria&um=1&ie=UTF-8&hl=de&sa=N&tab=wl>

Auch die Aufforderung an die Schülerinnen und Schüler selbst Sachverhalte zu suchen und vergleichbare Aufgaben zu entwickeln, kann die Anforderungen erhöhen. Dabei können auch umgekehrt proportionale Zusammenhänge angesprochen werden.

Aufgabe 14: Bruchrechnung

Aufgabe

Gegeben ist die Aufgabe: $\frac{3}{4} \square \frac{3}{8} = ?$

Mit welcher Rechenoperation erhältst du das größte Ergebnis?
Kreuze an.

- ☐ Addition
- ☐ Subtraktion
- ☐ Multiplikation
- ☐ Division

Lösung

- ☐ Addition
- ☐ Subtraktion
- ☐ Multiplikation
- ☒ Division

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler benötigen ein Verständnis für Rechenoperationen mit rationalen Zahlen (L1). Durch ein kenntnisgeleitetes Vorgehen werden sie zwischen der Addition und Division entscheiden (K2, AB II). Die Division von Bruchzahlen stellt ein Routineverfahren dar (K5). Bei der Division einer positiven Zahl durch eine Bruchzahl zwischen 0 und 1 ist der Quotient größer als der Dividend. Im Vergleich zur Addition erkennt man schnell das größere Ergebnis.

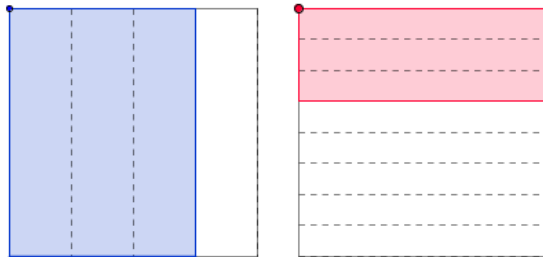
Fehler könnten darin begründet sein, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen von den natürlichen Zahlen anwenden. Sie werden dann die Multiplikation auswählen ohne eine Rechnung anzugeben. Es könnte auch sein, dass sie Schülerinnen und Schüler mit dieser Vorstellung nach dem Ausschlussprinzip vorgehen, die Subtraktion und Division ausschließen und die Aufgabe für die Multiplikation und Addition kontrollieren. In diesem Fall werden sich die Schülerinnen und Schüler für die Addition entscheiden.

Zur **Diagnose** von Fehlern sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, ihre Lösungswege zu beschreiben und zu begründen.

Hinweise zur Weiterarbeit

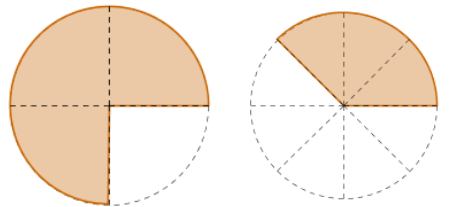
Mit **Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten**, können die Grundrechenarten für Brüche (erneut) visualisiert werden um eine Vorstellung zu erreichen.

Addition



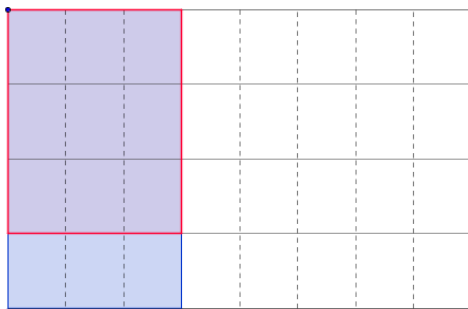
$$\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$$

Subtraktion



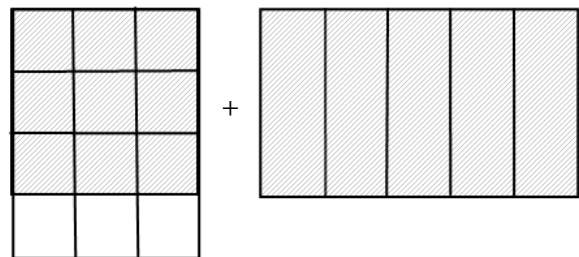
$$\frac{3}{4} - \frac{3}{8}$$

Multiplikation



$$\frac{3}{4} \text{ von } \frac{3}{8} \text{ bedeutet: } \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}$$

Division



$$\frac{3}{4} : \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}$$

Auch wäre es denkbar folgende Aufgaben als „Forschungsauftrag“ zu stellen, der beispielsweise in Partnerarbeit bearbeitet werden kann:

- Berechne. Vergleiche das Produkt mit den einzelnen Faktoren. Was stellst du fest? Formuliere dein Ergebnis in einem Satz.

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}; \quad \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{3}; \quad \frac{4}{5} \cdot 5; \quad 5 \cdot \frac{7}{10}$$

- Du weißt, wenn du eine natürliche Zahl durch eine natürliche Zahl größer als 1 dividierst, dann ist das Ergebnis kleiner als die Zahl. Untersuche an folgenden Beispielen, ob sich diese Aussage auf Bruchzahlen übertragen lässt.

Formuliere deine Erkenntnis in einem Merksatz.

$$\frac{3}{2} : \frac{3}{4}; \quad \frac{27}{4} : \frac{8}{3}; \quad \frac{12}{9} : \frac{3}{8}$$

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten, können sich mit Aufgaben auseinandersetzen, bei denen mit gemischten Zahlen gerechnet wird, z. B.:

- Berechne den Term:

$$2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{7}; \quad 5\frac{1}{3} - 2\frac{3}{5}; \quad 1\frac{4}{5} \cdot 3\frac{2}{3}; \quad 1\frac{3}{4} : 3\frac{1}{5}$$

Auch Fehleranalysen können sinnvoll sein, z. B.:

- Erkläre für jede Aufgabe warum das Ergebnis falsch ist:

$$4\frac{1}{2} \cdot 3 = 12\frac{1}{2}; \quad 2\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{2} = 2\frac{3}{10}; \quad \frac{7}{9} : \frac{3}{2} = \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{7}$$

Aufgabe 15: Glasscheibe

Aufgabe

Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 20 cm breit.

Heiner sagt: „Ich kann acht kleine rechteckige Glasscheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite so ausschneiden, dass ein rechteckiger Streifen von 24 cm mal 4 cm übrig bleibt.“

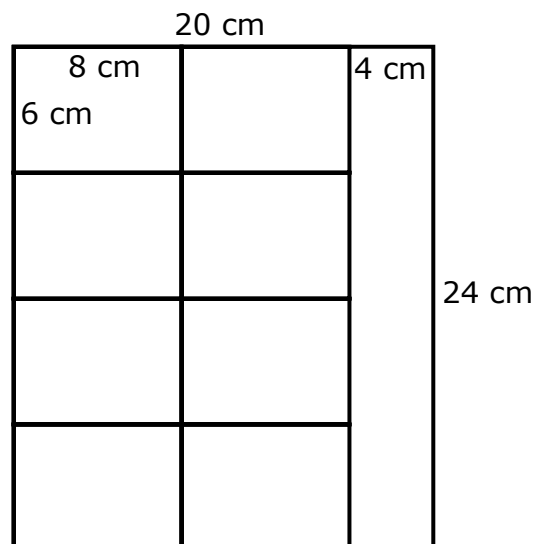
Begründe, dass Heiner Recht hat.



Lösung

Richtige vollständige Begründung, z. B.:

- (1) Skizze mit 8 kleinen Scheiben und Kennzeichnung des Streifens von 24 cm mal 4 cm



- (2) verbale Beschreibung der Anordnung der kleinen Glasscheiben und der Maße des Reststückes

- (3) ...

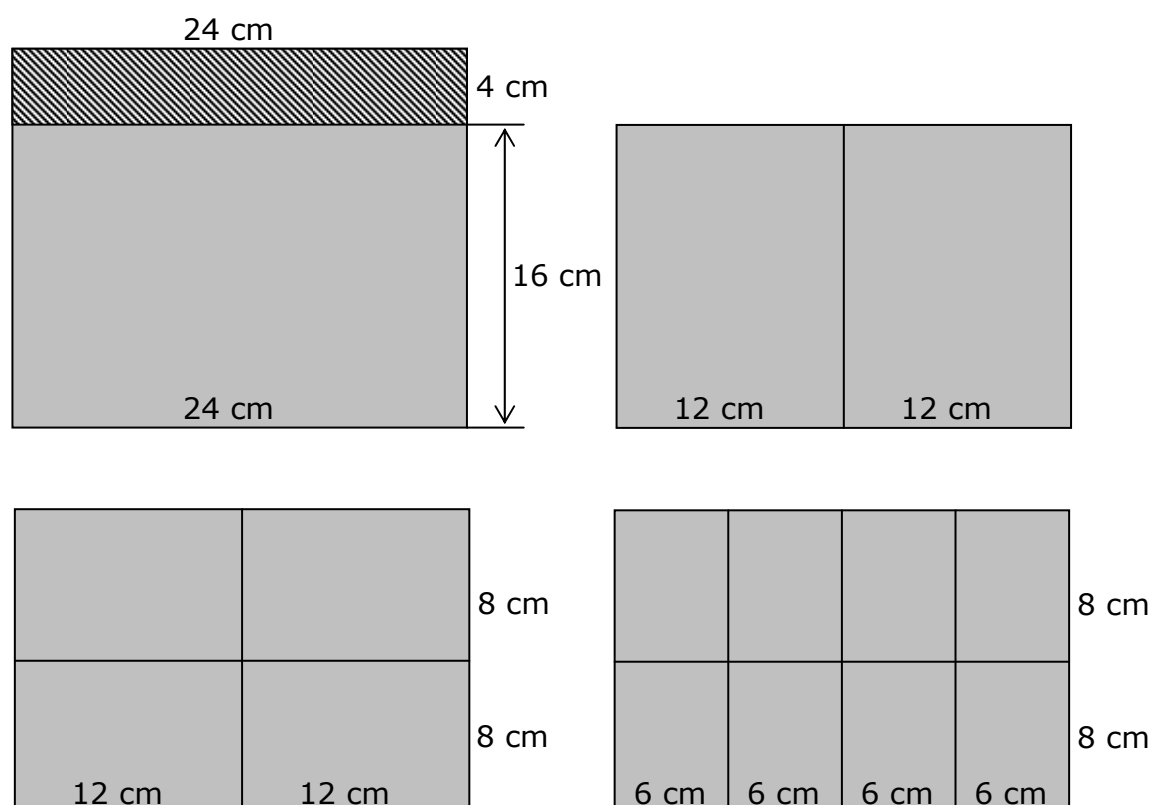
Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2) Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zum Lösen der Aufgabe nutzen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über Eigenschaften von Rechtecken (L3) und das Grundprinzip des Messens (L2). In Abhängigkeit von der Art des Lösens werden die Schülerinnen und Schüler zeichnerische Darstellungen oder rechnerische bzw. verbale Argumentationen verwenden (K4, K5, K1). Die gewählte Strategie erfordert in jedem Fall mehrere Schritte (K2, AB II).

Die Schülerinnen und Schüler nutzen heuristische Strategien zur Bearbeitung der Aufgabe. Sie könnten zuerst von dem Rechteck (24 cm x 20 cm) das Restrechteck abschneiden (24 cm x 4 cm), um dann zu ermitteln, wie groß das Rechteck ist, das in 8 gleichgroße rechteckige Teile (8 cm x 6 cm) zerlegt werden soll. Dieses wird zeichnerisch durch fortgesetzte Halbierung weiter zerlegt, bis 8 gleichgroße Rechtecke erreicht sind. Bei jedem Teilungsschritt sollten die Seitenlängen der Teilrechtecke bestimmt werden. Das Problem ist gelöst und die Argumentation ist vollständig, wenn sie für jedes der kleinen Rechtecke die Seitenlängen 8 cm und 6 cm angegeben haben.



Zur Lösung können die Schülerinnen und Schüler auch kommen, indem sie das zu teilende Rechteck mit der Länge von 24 cm und der Breite von 16 cm erkennen und die Maßzahlen der Länge und Breite auf Teilbarkeit durch 6 und 8 untersuchen. Sie wissen, dass 24 ein Vielfaches von 8 und ein Vielfaches von 6 ist, aber 16 nur ein Vielfaches von 8. Daraus können sie schlussfolgern, dass sie die Breite (16 cm) nur in zwei 8 cm – Stücke und damit die Länge (24 cm) in vier 6 cm – Stücke zerlegen können. Mit der anschließenden Rechnung $2 \cdot 4 = 8$ (Rechtecke) ist die Aussage von Heiner begründet.

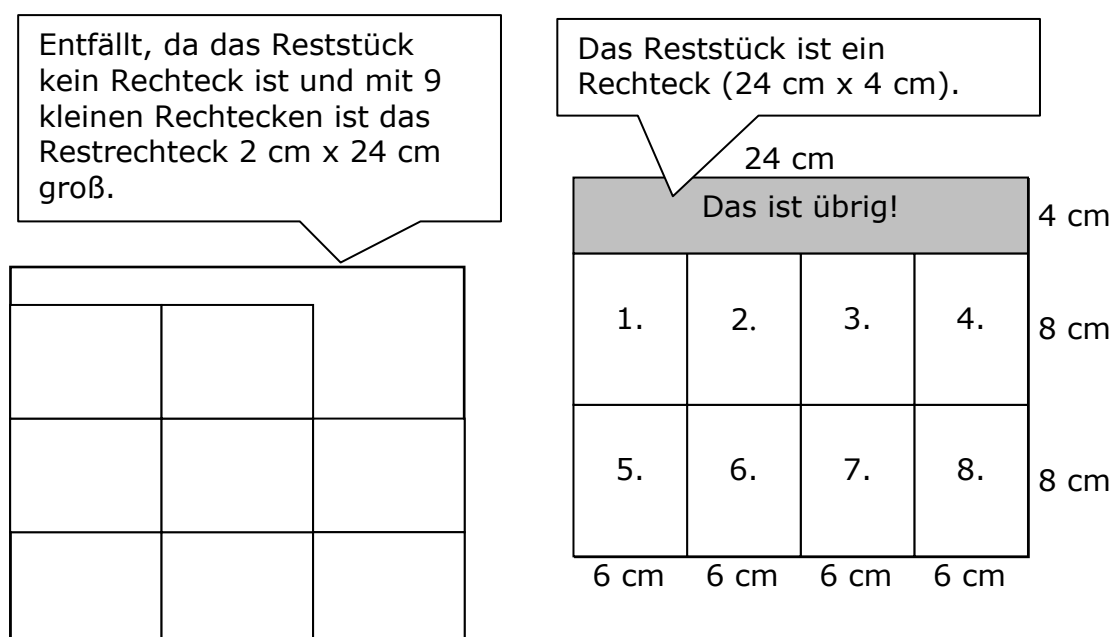
Die Schülerinnen und Schüler könnten analog auch im ursprünglichen Rechteck (24 cm x 20 cm) untersuchen, auf welche Weise 8 Rechtecke (8 cm x 6 cm) herausgeschnitten werden können, damit ein Restrechteck von 24 cm mal 4 cm übrig bleibt. Im Rechenfeld könnten dann folgende Rechnungen erkennbar werden:

$$24 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 480 \text{ cm}^2; 8 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2; 48 \text{ cm}^2 \cdot 8 = 384 \text{ cm}^2; 480 \text{ cm}^2 - 384 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2 \text{ und } 4 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^2$$

Bei einer solchen rechnerischen Argumentation fehlt jedoch die Anordnung der Scheiben.

Oder: $24 \text{ cm} : 6 \text{ cm} = 4$ und $20 \text{ cm} : 8 \text{ cm} = 2 \text{ Rest } 4$, aus dem Rest 4 ergibt sich der 4 cm breite Reststreifen.

Für ein zeichnerisch unterstütztes Probieren ist es nahe liegend, dass Schülerinnen und Schüler das Raster des Rechenfeldes sinnvoll nutzen und für 1 cm eine Kästchenlänge verwenden, z. B.:



Fehler können sowohl bei der rechnerischen als auch bei der zeichnerischen Argumentation auftreten. Häufig zu erwarten sind Rechenfehler, Berechnungen, die auf den Umfang von Rechtecken zielen und Rechnungen, die richtig sind, aber keine vollständigen Begründungen liefern, z. B.:

$20 : 8 = 2 \text{ R } 4$, es war 24 cm hoch. Mit der Rechnung $20 : 6 = 3 \text{ R } 2$ wird die Aussage von Heiner ohne Suche nach einer anderen Legevariante als falsch erklärt.

In den zeichnerischen Varianten sind Zählfehler zu erwarten, z. B. das Beenden der Lösungssuche mit der Variante - Reststreifen 2 cm x 24 cm. Mit dieser Variante wird Heiners Aussage als bestätigt angesehen, wenn nur ein Restrechteck ohne Betrachtung der Maße in die Überlegung einbezogen wurde. Oder die Schülerinnen und Schüler schlussfolgern, dass Heiners Aussage falsch sein muss.

Hinweise zur Weiterarbeit

Die Schülerinnen und Schüler können sich im Unterricht zunächst mit Aufgaben zur Zerlegung bzw. Zusammensetzung von Rechtecken beschäftigen. Im nächsten Schritt sollten sie sich vor allem mit dem Argumentieren und Begründen in verschiedenen Varianten auseinandersetzen. Sie sollten lernen, dass auch die zeichnerische Darstellung eine Möglichkeit bzw. ein Hilfsmittel zum Begründen sein kann. Strategien zur Lösung solcher Probleme können die Schülerinnen und Schüler durch handlungsorientierte Aufgabenbearbeitung erlernen.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten zunächst handelnd Aufgaben lösen, z. B. Legplättchen sortieren.

Im Sortiment der Legeplättchen befinden sich quadratische mit einer Seitenlänge von 3 cm und rechteckige mit den Seitenlängen 3 cm und 6 cm.

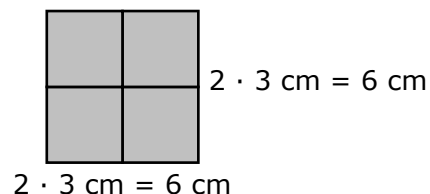
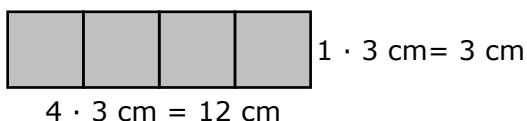


Beispielaufgaben: Legen zusammengesetzter Rechtecke aus Legeplättchen

- Lege aus 2 (3; 4; ... 12) quadratischen (rechteckigen) Legeplättchen ein Rechteck.
- Beschreibe das entstandene Rechteck. Gibt es noch andere Legemöglichkeiten für ein Rechteck mit diesen Legeplättchen?

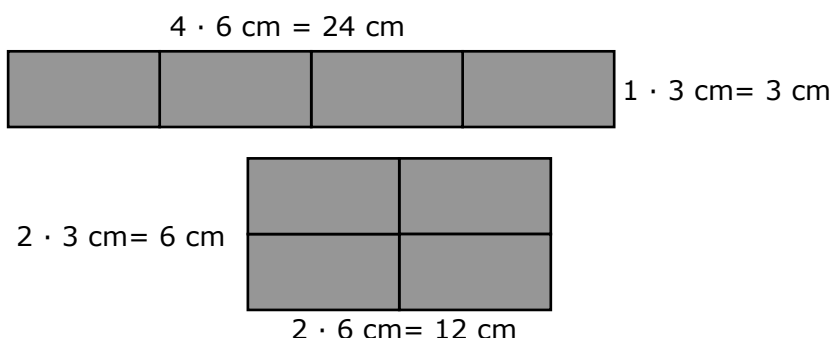
Die Beschreibung ist wörtlich möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollten lernen, eine Beschreibung durch eine zeichnerische Darstellung zu unterstützen, z. B.:

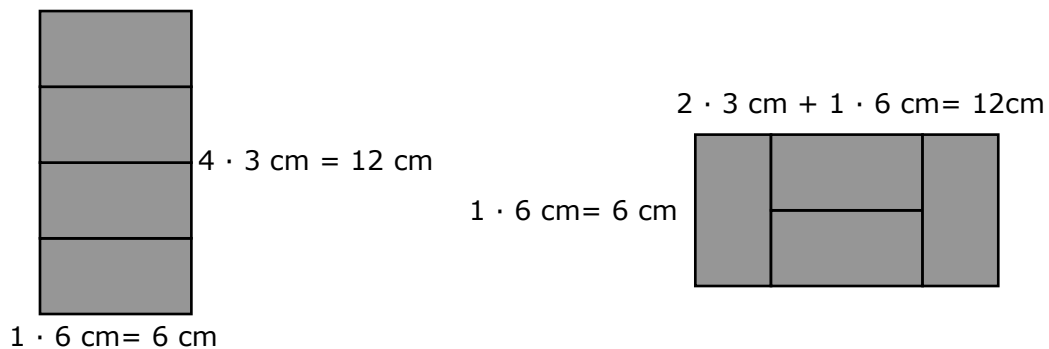
- mit 4 quadratischen Plättchen:



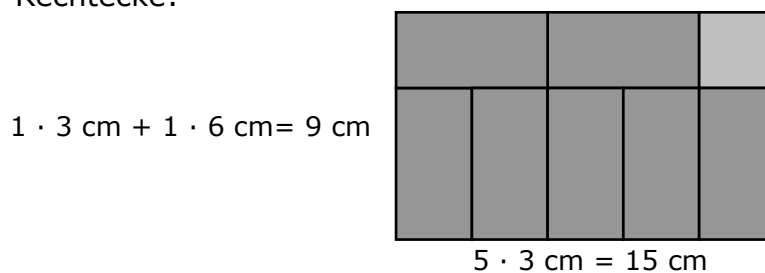
Bei der Verwendung der quadratischen Plättchen werden die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Seitenlängen der zusammengesetzten Rechtecke Vielfache von 3 cm sind. Diesen Erkenntnis ausnutzend könnten die Schüler aufgefordert werden, rechnerisch Seitenlängen von beliebig großen Quadraten (Rechtecken) anzugeben, die man vollständig mit diesen Plättchen auslegen kann.

- mit 4 rechteckigen Plättchen:





- aus quadratischen und rechteckigen Legplättchen zusammengesetzte Rechtecke:



Bei der Verwendung von rechteckigen Plättchen erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die Seitenlängen der zusammengesetzten Rechtecke Vielfache von 3 cm oder 6 cm sind, oder sich aus diesen zusammensetzen.

Für Schülerinnen und Schüler, die diese Erkenntnis gewonnen haben, könnten zur **Differenzierung** Aufgaben ohne Legeplättchen gestellt werden, aber mit der Anforderung die Lösung zeichnerisch darzustellen.

Beispielaufgaben: Zerlegen / Auslegen von vorgegebenen Rechtecken mit quadratischen oder rechteckigen Plättchen

- Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 10 cm und 5 cm (12 cm und 24 cm).
Kannst du es vollständig mit gleichgroßen quadratischen (rechteckigen) Plättchen auslegen? Zeichne deine Lösung auf.

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten**, sind Aufgabenstellungen geeignet, wie:

- Gegeben ist ein Rechteck, das 30 cm lang und 20 cm breit ist.
- Zerlege dieses Rechteck in 7 gleich große Rechtecke.
Ist das ohne Rest möglich? Begründe.
- Gegeben ist ein Rechteck, das 24 cm lang und 20 cm breit ist.
- Zerlege dieses Rechteck in gleich große 8 cm x 6 cm (10 cm x 5 cm) Rechtecke.
Ist das ohne Rest möglich? Begründe.

Aufgabe 16: Wandfarbe

Aufgabe

Jonas will zusammen mit seinem Vater sein Zimmer neu streichen.
Um den gewünschten hellgrünen Farbton zu erreichen, muss man einen Liter grüne Farbe mit vier Litern weiße Farbe mischen.
Für alle Zimmerwände zusammen benötigen sie insgesamt 20 Liter Farbe.

Wie viel Liter grüne Farbe müssen sie kaufen?

Sie müssen _____ Liter grüne Farbe kaufen.

Lösung

4

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler müssen einen quantitativen Zusammenhang zwischen der Menge der grünen und weißen Farbe und der Gesamtmenge der gemischten Farbe erkennen (L4). Dazu wird die reale Situation auf ein mathematisches Modell (proportionale Zuordnung) übertragen (K3).
Zum Lösen der Aufgabe eignet sich eine Tabelle, die schrittweise (additiv) oder im direkten Sprung (multiplikativ) die erforderlichen Mengen auflistet, oder die Verwendung von Gleichungen (K5, AB II):

	Grüne Farbe in ℓ	Weiß Farbe in ℓ	Hellgrüne Farbe in ℓ
	1	4	5
	2	8	10
	3	12	15
	4	16	20

Diagramm zur Tabelle: Ein Pfeil auf der linken Seite zeigt von der ersten Zeile nach unten und ist mit $\cdot 4$ beschriftet. Ein Pfeil auf der rechten Seite zeigt von der ersten Zeile nach unten und ist ebenfalls mit $\cdot 4$ beschriftet.

oder

$$1\ell + 4\ell = 5\ell$$

$$5\ell \cdot 4 = 20\ell$$

Faktor 4

$$1\ell \cdot 4 = 4\ell$$

Die Rechnungen können jedoch auch im Kopf ausgeführt werden.

Als häufiger **Fehler** ist zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler, wenn sie die Farben ins Verhältnis 1 :(zu) 4 setzen, das „:“-Zeichen als Geteiltzeichen gebrauchen. Dadurch wird der Anteil der grünen Farbe auf die falsche Grundmenge bezogen, sodass die grüne Farbe ein Viertel statt ein Fünftel der anzumischenden Farbe ausmacht.

So kommen sie zu dem Ergebnis, 5 Liter grüne Farbe kaufen zu müssen:

$$\frac{1}{4} \text{ von } 20 \text{ l} = 5 \text{ l}$$

Kann der aufgetretene Fehler nicht am Rechenweg oder am Ergebnis abgelesen werden, sollen die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert werden, ihren Lösungsweg im Unterricht zu erläutern.

Hinweise zur Weiterarbeit

Die folgenden Aufgabenbeispiele sind für **Schülerinnen und Schüler geeignet, die die Aufgabe nicht lösen konnten**.

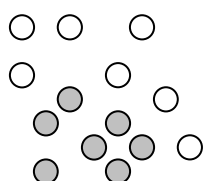
I. Aufgabenvariation, bei der die Schülerinnen und Schüler sich zunächst mit dem Verhältnis von Größen haptisch auseinandersetzen, um dann zu einfachen linearen Zuordnungen überzugehen:

- Zeichne eine Strecke beliebiger Länge. Zeichne eine weitere Strecke, die halb (doppelt, dreimal,...) so lang wie die gezeichnete Strecke ist, ohne diese Strecke genau zu messen. Überprüfe dann das Ergebnis durch Messung.
- Peter hilft seiner Großmutter bei der Gartenarbeit. Für eine Stunde erhält er 4,00 € Belohnung.
Wie viel Geld verdient er, wenn er seiner Großmutter 5 Stunden im Garten hilft? Überprüfe deine Lösung an Hand einer Skizze mit symbolischen 2 Euro - Stücken.

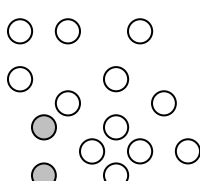
II. Aufgabenvariation, zu deren Lösung der Bezug des Bruchteils zum jeweiligen Ganzen erforderlich ist:

- Bestimme den Anteil der Kreise, die gefärbt sind.

a) (AB I)

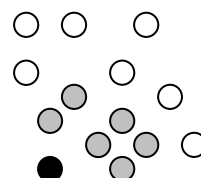


b) (AB I)



- Bestimme den Anteil der gefärbten Kreise, die schwarz sind. Schreibe den Anteil als Bruchterm. (AB II)

(siehe auch /3/ 2008, Heft 1, Aufgabe 3)



- Helmut hat 4 weiße und 9 braune Schokolinsen. Gib den Anteil der weißen Schokolinsen an und überprüfe deine Angabe an Hand einer Skizze.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten, können sich mit komplexeren Kontexten beschäftigen.

- Drei Geschwister bekommen im Monat insgesamt 34 € Taschengeld. Das älteste Kind bekommt dreimal so viel wie das jüngste Kind. Das mittlere Kind bekommt 7 € mehr als die Hälfte vom jüngsten Kind. Wie viel Taschengeld bekommt jedes Kind?

Auch könnte die Schwierigkeit erhöht werden, indem Werte zunächst aus einer Tabelle entnommen werden müssen.

- Die folgende Tabelle gibt die Taxitarife in einer deutschen Großstadt wieder:

Gefahrene Strecke	Preis pro Kilometer	
	tagsüber von 6h bis 22h (Normaltarif)	nachts von 22h bis 6h (Nachttarif)
Bis 10 Kilometer	1,40 €	x €
Über 10 Kilometer	1,30 €	1,35 €

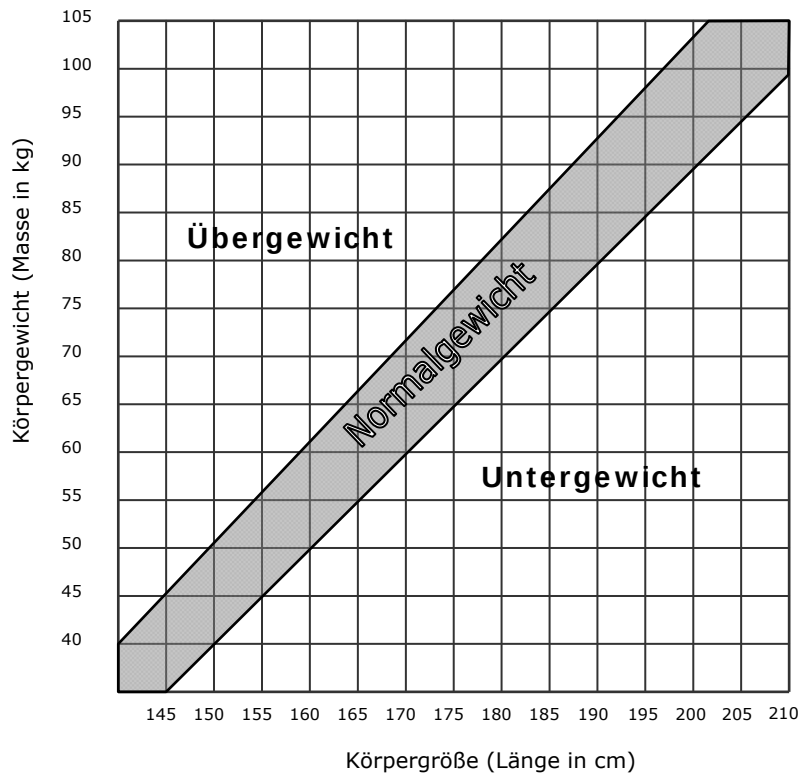
Für jede Fahrt wird zusätzlich eine Grundgebühr von 2,50 € erhoben.

- Wie teuer ist vormittags eine Fahrt von 7,5 Kilometer Länge?
- Eine Fahrt im Normaltarif unter 10 km Länge kostete laut Zähler 13,70 €. Welche Strecke wurde gefahren?
- Eine Fahrt von genau 5 Kilometern kostet zwischen 22 Uhr und 6 Uhr exakt 9,75 €. Wie hoch ist der Preis für einen Kilometer (x)?
- Gib einen allgemeinen Term für die Berechnung der Kosten K einer Fahrt im Normaltarif bis 10 Kilometer Länge an.

Aufgabe 17: Körpergewicht

Aufgabe

Mit dem folgenden Diagramm kann man näherungsweise ermitteln, ob man Normalgewicht hat oder nicht.



Wie schwer sollte nach diesen Angaben ein 1,55 m großer Schüler mindestens sein, um Normalgewicht zu haben?

Ein 1,55 m großer Schüler sollte mindestens _____ kg wiegen.

Lösung

45

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4) Daten und Zufall (L5)
Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entnehmen aus der graphischen Darstellung Informationen und werten diese aus (L5, K4). Sie erkennen in dem abgebildeten Zusammenhang zwischen der Körpergröße (Länge in cm) und dem

Körpergewicht (Masse in kg) den mit Normalgewicht gekennzeichneten Bereich (L4). Die Schülerinnen und Schüler geben dann für diesen Bereich und für eine bestimmte Körpergröße den minimalen Wert des entsprechenden Körpergewichtes an, indem sie „mindestens“ richtig interpretiert haben (AB II).

Ein häufiger **Fehler** wird sein, dass die Forderung nach dem minimalen Wert für den Bereich des Normalgewichts bei einer bestimmten Größe nicht beachtet wird. Die Schülerinnen und Schüler geben dann Werte wie z. B. 50 kg oder den maximalen Wert von etwa 56 kg an.

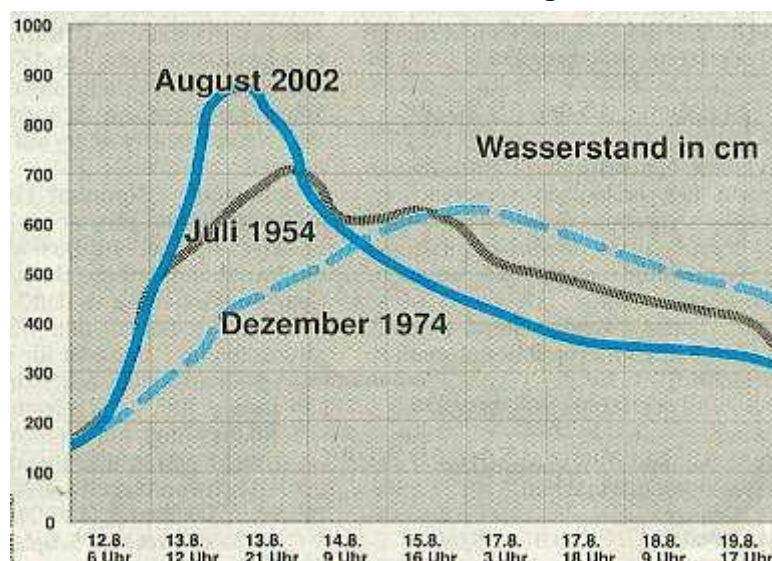
Um eine detaillierte **Diagnose** von Fehlern zu ermöglichen, sollte im Unterricht Wert darauf gelegt werden, dass die Vorgehensweise beim Entnehmen von Informationen aus der gegebenen graphischen Darstellung verbalisiert wird.

Hinweise zur Weiterarbeit

Das Entnehmen von Informationen aus Grafiken ist für das Lösen von Sachproblemen oft von Bedeutung und somit eine Basiskompetenz für die Schülerinnen und Schüler, die fachübergreifend aufgebaut werden sollte. Zur **Differenzierung** bietet sich der Einsatz von weiteren graphischen Darstellungen aus dem Alltag an, die sich in Komplexität und Lesbarkeit unterscheiden können.

Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten aus graphischen Darstellungen verschiedene Werte ablesen und mit diesen operieren, wie:

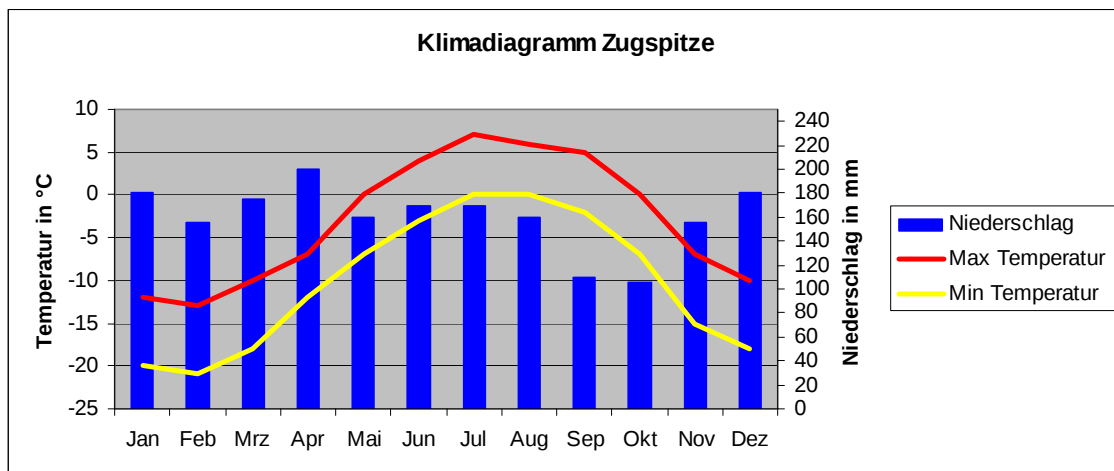
Die Wasserstände der Mulde am Pegel Golzern



Quelle: <http://www.gbrinkmann-bennewitz.privat.t-online.de/>

- Bestimme für das Hochwasser vom Juli 1954 den höchsten Wasserstand.
- Lies den niedrigsten im Diagramm erfassten Wasserstand der Mulde ab.
- Ermittle die Differenz der höchsten Wasserstände vom Dezember 1974 und vom Juli 1954.
- Bestimme aus dem Diagramm den Zeitabschnitt, in dem beim Hochwasser vom August 2002 der Wasserstand am schnellsten anstieg.
- Formuliere selbst Fragen, die du mit Hilfe des Diagramms beantworten kannst.

Für Übungen mit **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, bieten sich komplexere Grafiken an, in denen mehrere Größen dargestellt sind. Ein Beispiel dafür sind Klimadiagramme.



- In welchem Monat war die durchschnittliche Niederschlagsmenge am größten (am geringsten)?
- Ermittle, in welchem Monat die geringste Temperatur auftrat.
- Ermittle die Differenz der durchschnittlichen Niederschlagsmengen zwischen dem Monat mit der höchsten Niederschlagsmenge und dem Monat mit der geringsten Menge.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Niederschlagsmenge und Temperatur?
- ...

Aufgabe 18: Becher

Aufgabe

Peter hat eine $1\frac{1}{2}$ Liter-Flasche Mineralwasser.

Wie viele 0,2-Liter-Becher kann er damit vollständig füllen?

Peter kann damit _____ 0,2-Liter-Becher vollständig füllen.

Lösung

sieben (7)

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2)
Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB II

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler benötigen Sinn tragende Vorstellungen vom Bruchbegriff. Sie müssen in der Lage sein, gemischte Zahlen (gemeine Brüche) in Dezimalbrüche umzuwandeln (oder umgekehrt) bzw. Maßeinheiten des Volumens ineinander umzurechnen, wenn sie mit der nächst kleineren Maßeinheit ml rechnen (L2) ($1\frac{1}{2}$ l = 1,5 l = 1500 ml).

Mit Hilfe der Grundvorstellung von einem Ganzen schließen sie, dass $5 \cdot 0,2$ Liter = 1 Liter oder bei Umwandlung in eine kleinere Maßeinheit dass $5 \cdot 200$ ml = 1000 ml sind. Durch gezieltes Probieren oder durch Bilden der Vielfachen von 0,2 oder der Vielfachen von 200 kommen die Schülerinnen und Schüler zu der Feststellung, dass außer den fünf Bechern noch zwei weitere Becher aus den 1,5 Litern bzw. 1500 ml Mineralwasser vollständig gefüllt werden können und ein Rest von 0,1 Liter übrig bleibt (K3, K5, AB II).

Fehler könnten auftreten, wenn die gemischte Zahl $1\frac{1}{2}$ in einen falschen Dezimalbruch (z. B.: 1,2) oder der Dezimalbruch 0,2 in einen falschen gemeinen Bruch (z. B.: $\frac{1}{2}$) umgewandelt werden. Die Ursache solcher Fehler liegt im Bruchverständnis. Ein weiterer Fehler liegt im falschen Umrechnen der Einheiten, wobei das Umwandeln von 1,5 l in 150 ml und 0,2 l in 20 ml am Ende wieder zum richtigen Ergebnis führt. Das einfache Abarbeiten der Division führt in jedem Fall zum Ergebnis 7,5. Die formale Übernahme der Zahl in den Antwortsatz ergibt ein falsches Ergebnis, denn bei dieser Aufgabenstellung darf nur der ganzzahlige

Teil 7 übernommen werden. Weiterhin können Rechenfehler zum falschen Ergebnis führen.

Zur **Diagnose** der Fehlerursache kann die Lehrkraft den ggf. aufgeschriebenen Rechenweg analysieren oder die Schülerinnen und Schüler können aufgefordert werden, ihre Überlegungen zu formulieren. Dabei werden auch eventuelle Rechenfehler erkennbar.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für **Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe nicht lösen konnten**, bieten sich Übungen an, die die Vorstellung von Inhaltsangaben schulen. Zu empfehlen sind Aufgaben mit Maßangaben sowohl mit Dezimalbrüchen als auch mit gemeinen Brüchen, z. B.:

- Vergleiche das Volumen von mitgebrachten Getränkeverpackungen (Nachbar / Bankreihe / Klasse).
- Suche Getränkeverpackungen mit 200 ml (1 l; 0,75 l; 500 ml ...) Inhaltsangabe und solche mit gleichem Volumen in einer anderen Schreibweise.
- Es ist üblich, eine Torte in 16 gleich große Stücke zu teilen.
 - Wie viele Stücke enthält eine halbe Torte?
 - Wie viele Stücke enthält eine viertel Torte?
 - Welchen Anteil an der Torte hat ein Stück?
 - Wenn 4 Stücke gegessen wurden, welcher Anteil an der Torte fehlt?

(siehe auch /3/ 2010, Heft B, Aufgabe 1)

Weiterhin sollten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben zum Umwandeln von Dezimalbrüchen in Brüche und umgekehrt bearbeiten, sowie das Umwandeln einer Maßeinheit in die kleinere/größere trainieren.

z. B.:

- Wandle die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche um. ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ...)
- Wandle die Dezimalbrüche in gemeine Brüche um. (0,5; 0,2; 0,75; ...)
- Wandle 500 ml in Liter um.
- In einem Kochrezept steht: „Geben Sie 0,5 l Fruchtsaft hinzu. Wie viel Milliliter Fruchtsaft sind hinzuzugeben?“
- ...

Schließlich bieten sich Aufgaben an, bei denen die Berechnung von Anteilen gegebener Größen im Vordergrund steht. Die Anteile sollten zunächst auf die geläufigen Brüche beschränkt werden, z. B.:

- Berechne $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... von einer Tonne.
- Wie oft passt 0,2; 0,25; ... in ein Ganzes / Halbes?
- Wie viele 250 g (0,250 kg)-Päckchen Nudeln sind in einem 5 kg -Karton Nudeln enthalten?

Es ist für einige Schülerinnen und Schüler ebenfalls wichtig, die Division von gemeinen Brüchen durch Dezimalbrüche oder umgekehrt zu wiederholen, wie z. B.: Berechne: $\frac{2}{5} : 0,5$; $1,5 : \frac{1}{5}$

Eine Festigung des Grundwissens über geläufige Dezimalbrüche könnte auch mit dem im Folgenden aufgeführten Spiel erfolgen.

Spielmaterial:

Karten, die jeweils eine Bruchdarstellung, einen gemeinen Bruch oder einen Dezimalbruch enthalten.

Mögliche Aufgabenstellung:

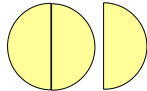
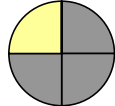
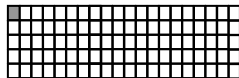
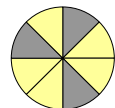
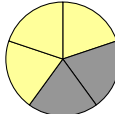
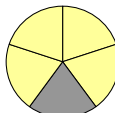
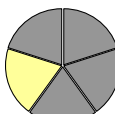
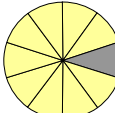
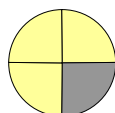
Lege zu jedem gemeinen Bruch den gleichwertigen Dezimalbruch und die passende Bruchdarstellung.

alternativ:

Finde Pärchen, bzw. drei zusammengehörende Karten.

Für Schülerinnen und Schüler die ausreichende Bruchvorstellungen haben, kann die "dritte Spalte" für die jeweilige graphische Darstellung des Bruches entfallen.

Individuell muss sich die Lehrkraft entscheiden, ob die Bruchdarstellungen genutzt werden sollen, eine Figur vorgegeben wird, in welcher die Schülerinnen und Schüler den entsprechenden Bruchteil färben oder ob eine Darstellung von den Schülerinnen und Schülern angefertigt werden soll.

$\frac{1}{2}$	0,01	
1,5	$\frac{3}{10}$	
$\frac{1}{4}$	0,5	
0,4	$\frac{3}{4}$	
$\frac{1}{5}$	0,1	
0,8	$\frac{1}{8}$	
0,3	$\frac{3}{8}$	
$\frac{4}{5}$	0,125	
0,25	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{100}$	0,75	
0,375	$\frac{2}{5}$	
$\frac{3}{2}$	0,2	

Von **Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe lösen konnten**, können Variationen der Testaufgabe bearbeitet werden. Sie entstehen zum Beispiel durch eine Veränderung des Bruchteils oder der Verwendung verschiedener Einheiten.

- Berechne $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; ... von einer Tonne.
- Berechne $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; ... von 320 Tonnen.
- Wie oft passt 0,3 Liter ($\frac{1}{3}$ Liter) in ein Ganzes (Halbes)?
- Wie viele 375 ml (0,375 Liter)-Flaschen Öl kann man aus einem 3 Liter - Kanister Öl füllen?

Zur Erhöhung des Schwierigkeitsgrades kann in o. g. Spiel eine Spalte für die bequemen Prozentsätze eingebaut werden.

$\frac{1}{2}$	100 %	0,01
1,5	50 %	$\frac{3}{10}$
$\frac{1}{4}$	75 %	0,5
0,4	25 %	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{5}$	20 %	0,1
0,8	1 %	$\frac{1}{8}$
0,3	10 %	$\frac{3}{8}$
$\frac{4}{5}$	80 %	0,125
0,25	12,5 %	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	150 %	0,75
0,375	30 %	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{2}$	37,5 %	0,2

- Aufgabenstellung: Schneide die Kärtchen aus. Lege jeweils drei zusammengehörende Kärtchen nebeneinander.

Aufgabe 19: Fehlende Ziffern

Aufgabe

In der folgenden Zahl fehlen zwei Ziffern.

4		2	5	
---	--	---	---	--

Ergänze zu einer fünfstelligen Zahl so, dass sie durch 3 und 8 teilbar ist.

Lösung

41256 oder 44256 oder 47256

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Zahl (L1)
Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung der Aufgabe ist es notwendig, die Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 3 bzw. 8 zu kennen und anzuwenden (L1, K5). Es handelt sich um eine für diese Klassenstufe anspruchsvolle Problemstellung. Die Schülerinnen und Schüler müssen erfassen, was es bedeutet, dass bei einer Zahl beide Kriterien erfüllt sind und in einem mehrschrittigen Verfahren eine Strategie zum Finden von Lösungsziffern anwenden (K2, AB III).

Es sollte zuerst die letzte Stelle entsprechend der Endstellenregel für die Teilbarkeit durch 8 mit der Ziffer 6 ergänzt werden. Im Anschluss wird die zweite Ziffer so bestimmt, dass die Quersumme durch 3 teilbar ist. Es ergeben sich so mehrere Lösungen durch die Ziffern 1, 4 und 7.

Natürlich ist es auch möglich die Aufgabe durch zeitaufwendiges systematisches Probieren zu bearbeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, gleich beim ersten Versuch durch Raten eine Lösung zu erhalten, ist sehr klein (3 %).

Um eine **Diagnose** von **Fehlern** zu ermöglichen, sollten die Schülerinnen und Schüler im Unterricht aufgefordert werden, ihre Lösungswege zu erläutern bzw. zu dokumentieren.

Hinweise zur Weiterarbeit

Für Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösen konnten, ist es sinnvoll, die Teilbarkeitsregeln zu wiederholen und anzuwenden.

- Wie lauten die Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 3 und 8 (2 und 5)?
- Notiere drei Zahlen, die durch 8 (3; 2; 5) teilbar sind.
- Kreuze an, welche Zahlen durch 2 und 5 teilbar sind.
 - ☐ 12
 - ☐ 20
 - ☐ 45
 - ☐ 50
 - ☐ 60
 - ☐ 86
 - ☐ 100
- Kreuze an, welche Zahlen durch 3 und 8 teilbar sind.
 - ☐ 12
 - ☐ 24
 - ☐ 45
 - ☐ 56
 - ☐ 60
 - ☐ 96
 - ☐ 300
- Finde Zahlen, die gleichzeitig durch 3 und 8 teilbar sind. Durch welche anderen Zahlen sind die von dir angegebenen Zahlen dann automatisch auch teilbar?

Für **Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe lösen konnten**, sind komplexere Aufgaben geeignet, die zusätzlich die Kompetenzen des Argumentierens (K1) oder des Kommunizierens (K6) einbeziehen.

- Systematisiere die Teilbarkeitsregeln. Für welche Zahlen gibt es Endstellenregeln und für welche Quersummenregeln?
- Unter welchen Bedingungen ist eine Zahl gleichzeitig durch 2 und 3 teilbar? Für welche Zahl gilt diese Regel dann auch?
- Unter welcher Bedingung kann aus der Teilbarkeit durch zwei verschiedene Zahlen auf die Teilbarkeit durch eine dritte Zahl geschlossen werden?
- Wie kann die Teilbarkeitsregel für die Zahl 20 (15; 12; 7) lauten?
- Kannst du für alle Zahlen Teilbarkeitsregeln formulieren? Begründe.
- Teilbarkeitsregeln finden oft beim Rechnen mit Brüchen Anwendung. Finde dafür Beispiele.

Aufgabe 20: Würfel

Aufgabe

Klaus hat 80 gleich große würfelförmige Bausteine aus Holz. Er behauptet, dass nur ein Baustein übrig bleibt, wenn er mit diesen Bausteinen den größtmöglichen Würfel zusammensetzt.

Hat Klaus Recht? Begründe deine Meinung.

Klaus hat _____.

Begründung:



Lösung

Richtige Entscheidung **und** richtige, vollständige Begründung

Entscheidung: Klaus hat **nicht Recht**.

Begründung, z. B.:

- (1) Der größtmögliche Würfel besteht aus 64 ($= 4 \cdot 4 \cdot 4$) Bausteinen. Es bleibt also nicht nur 1 Baustein, sondern es bleiben 16 Bausteine übrig.
(Beim nächst größeren Würfel werden 125 ($= 5 \cdot 5 \cdot 5$) Bausteine benötigt.)
- (2) 79 lässt sich nicht in drei gleiche Faktoren zerlegen.
- (3) zeichnerische Darstellung des Sachverhaltes
- (4) ...

Informationen zur Aufgabe

Leitidee	Messen (L2) Raum und Form (L3)
Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	AB III

Bemerkungen zur Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine mathematische Argumentation (K1), bei der sie die Eigenschaft eines Würfels nutzen, dass alle Kanten gleich lang sind (L3). Obwohl durch die Aufgabenstellung keine konkreten Maße gegeben sind, müssen sie erkennen, dass ein Würfel stets mit n^3 ($n \geq 1$) gleich großen kleinen Würfeln gebaut wird. Der Zusammenhang zwischen der Kantenlänge und dem Volumen eines Würfels spiegelt dies wieder. Die Schülerinnen und Schüler bilden die Kubikzahlen von 4 und 5 und vergleichen das Ergebnis mit 79. Die würfelförmigen Bausteine können dabei als Einheitswürfel (Grundprinzip des Messens) aufgefasst werden (L2, K2, K5). Die Schülerinnen und Schüler müssen ein anspruchsvolles Problem durch

strategiegestütztes Vorgehen lösen. Die notwendige mathematische Argumentation verlangt mehrschrittiges Vorgehen und sichere Zahlenvorstellungen im Bereich der natürlichen Zahlen (AB III).

Ein häufig auftretender **Fehler** wird eine falsche Begründung der Aussage „Klaus hat nicht Recht“ sein. Die Schülerinnen und Schüler gehen von der falschen Annahme aus, dass eine gerade Anzahl Bausteine genüge, um daraus ohne Rest einen Würfel zu bauen. Sie behaupten, dass aus 80 Steinen ein Würfel zu bauen sei.

Bearbeitung durch einen Schüler:

Klaus hat unrecht.

Begründung: Weil 80 eine grade Zahl ist und man das Linkriegt.

Die Ursachen können darin zu finden sein, dass sie aus dem Volumen nicht auf die Kantenlänge schließen können. Möglicherweise ist einigen Schülerinnen und Schülern nicht klar, dass alle Kanten eines Würfels gleich lang sind.

Zur **Diagnose** sollten die Schülerinnen und Schüler nach den Kantenlängen der von ihnen vorgeschlagenen Würfel gefragt werden.

Hinweise zur Weiterarbeit

Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösen konnten, sollten die Eigenschaften eines Würfels noch einmal nahe gebracht werden. Dabei werden die Unterschiede zu anderen Quadern betont. Die Berechnung des Volumens muss in Verbindung mit einer entsprechenden Vorstellung, die bei der Anzahlbestimmung hilft, noch einmal in den Mittelpunkt gerückt werden. Wobei zuerst vorwärts und dann erst, wie es die Testaufgabe verlangt, rückwärts gearbeitet werden sollte.

- Du hast viele gleich große kleine Bausteine. Baue aus diesen große Würfel. (Bausteine zur Verfügung stellen oder nur in der Vorstellung bauen und die folgende Tabelle nutzen).
- Fülle die Tabelle aus.

Anzahl der kleinen Würfel	8		64	
Anzahl der kleinen Würfel in einer Kante des großen Würfels		3		10

- Beschreibe die Seitenflächen eines Würfels (Quaders).
- Die Grundfläche eines Körpers sei ein Quadrat. Um was für einen Körper könnte es sich handeln? Nutze Bausteine und baue (zeichne) diese Körper.

- Was weißt du über die Länge, Breite und Höhe eines Würfels?
- Was weißt du über die Kantenlängen eines Würfels?
- Berechne die Anzahl nötiger Bausteine für einen Würfel, der eine „Kantenlänge“ von 2 (3; 4; 5) Bausteinen hat.
- Ergänze die Tabelle.

Kantenlänge des Würfels	6 cm		12 cm	
Volumen des Würfels		1000 cm ³		8000 cm ³

Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe lösen konnten, sollten an komplexere Argumentationen herangeführt werden. Sie können aufgefordert werden, eigene Ideen zu dem „Würfelproblem“ zu finden.

- Warum genügt es nicht, eine gerade Zahl an kleinen Würfeln zu haben, um einen große Würfel zu bauen? Finde Gegenbeispiele.
- Finde eine Möglichkeit, mit einer ungeraden Anzahl von kleinen Würfeln einen größeren zu bauen (zu zeichnen). Beschreibe dein Vorgehen.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kantenlänge und Volumen eines Würfels (eines Quaders) und umgekehrt?
- Die „Kantenlänge“ eines Würfels beträgt 2 (3; 4; 5) Bausteine. Wie viele Bausteine liegen dann im „Inneren“ des Würfels, haben also keine Berührung zur Außenfläche?
- Zeichne räumliche Darstellungen von Würfeln, die aus Einheitswürfeln gebaut wurden. Erkläre an Hand deiner Darstellung den Zusammenhang zwischen den Bausteinen und dem „großen“ Würfel.