

Lernstandserhebung

Didaktisches Material

8

Mathematik (Heft B)

Kurzkomentare

Das *Didaktische Material* ist im Auftrag des Hessischen Kultusministeriums durch das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen, Berlin (IQB) erstellt worden.

Die Aufgaben enthalten urheberrechtlich geschütztes Material (Fotografien, Grafiken, Texte etc.). Dennoch können Sie dieses Material für Ihre persönlichen Unterrichtszwecke in gewohnter Weise nutzen. Von einer Weitergabe an Dritte ist abzusehen.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1: Frühstücksbrötchen	4
Aufgabe 2: Literberechnungen	5
Aufgabe 3: Rechenvorteil	6
Aufgabe 4: Mathematikarbeit	7
Aufgabe 5: Weitsprung	8
Aufgabe 6: Glücksrad	13
Aufgabe 7: Restaurantgewinnspiel	15
Aufgabe 8: Fische zählen	20
Aufgabe 9: Tarifvergleich	21
Aufgabe 10: Gleichungen lösen ist nicht schwierig	27
Aufgabe 11: Linear und proportional	31
Aufgabe 12: Abstand auf dem Wasser	35
Aufgabe 13: Schnittpunkt von Graphen	37
Aufgabe 14: Judomatte	39
Aufgabe 15: Holzstab	40
Aufgabe 16: Fußleisten	41
Aufgabe 17: Quadratfläche	42
Aufgabe 18: Köthener Quadrate	43
Aufgabe 19: Drehkörper	46
Aufgabe 20: Regelmäßige Vielecke	46
Glossar	49

Übersicht

Nr.	Name der Aufgabe	Kompetenz- stufe	Kompetenz						Leitidee					AB
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	
1.1	Frühstücksbrötchen	I					x		x					I
1.2	Frühstücksbrötchen	I					x	x	x					I
1.3	Frühstücksbrötchen	I					x	x	x					I
2.1	Literberechnungen	I					x		x					I
2.2	Literberechnungen	III		x			x		x					I
3	Rechenvorteil	II		x			x		x					I
4	Mathematikarbeit	I			x		x		x					I
5.1	Weitsprung	III				x	x	x	x					I
5.2	Weitsprung	V				x	x		x					II
5.3	Weitsprung	V	x		x	x	x		x					II
5.4	Weitsprung	II			x	x		x	x					III
6.1	Glücksrad	I					x						x	I
6.2	Glücksrad	II			x	x							x	I
7.1	Restaurantgewinnspiel	IV			x			x					x	II
7.2	Restaurantgewinnspiel	V		x	x		x	x					x	II
7.3	Restaurantgewinnspiel	III	x		x			x					x	II
8	Fische zählen	V			x		x	x					x	II
9.1	Tarifvergleich	IV				x		x					x	III
9.2	Tarifvergleich	V				x		x					x	II
9.3	Tarifvergleich	V				x		x					x	III
10.1	Gleichungen lösen ist nicht schwierig	I					x					x		I
10.2	Gleichungen lösen ist nicht schwierig	II					x					x		I
10.3	Gleichungen lösen ist nicht schwierig	IV					x	x				x		III
11.1	Linear und proportional	IV			x			x				x		II
11.2	Linear und proportional	V	x	x			x	x				x		III
12	Abstand auf dem Wasser	IV		x	x	x						x		II
13	Schnittpunkt von Graphen	V				x	x					x		I
14	Judomatte	I					x			x				I
15.1	Holzstab	I					x			x				I
15.2	Holzstab	II					x			x				I
16.1	Fußleisten	III			x		x	x		x				I
16.2	Fußleisten	II			x		x		x					I
17	Quadratfläche	II				x	x			x				I
18	Köthener Quadrate	IV	x	x				x		x				III
19	Drehkörper	I				x					x			I
20.1	Regelmäßige Vielecke	III				x	x				x			I
20.2	Regelmäßige Vielecke	II				x	x				x			I
20.3	Regelmäßige Vielecke	IV		x				x			x			III

Aufgabe 1: Frühstücksbrötchen

Teilaufgabe 1.1

Angelika kauft sechs normale Brötchen zu je 0,35€ und vier Körnerbrötchen zu je 0,45€.

Gib an, wie viel sie insgesamt bezahlen muss.

_____ €

Schreibe deinen Rechenweg auf.

Auswertung

RICHTIG	Angabe des richtigen Preises 3,90 (€) und Darlegung des Rechenweges. Dies kann in rechnerischer oder verbal beschreibender Form erfolgen. Z. B.: $6 \cdot 0,35 \text{ €} + 4 \cdot 0,45 \text{ €} = 3,90 \text{ €}$ ODER 3,90 €. Ich habe 6 mal 0,35 € und 4 mal 0,45 € gerechnet. Die Ergebnisse habe ich dann zusammengerechnet.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: 3,90 € (Rechenweg fehlt) ODER 4,10 € Ich habe 4 mal 0,35 € plus 6 mal 0,45 € gerechnet.

Merkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Teilaufgabe 1.2

Angelika kauft fünf normale Brötchen zu je 0,35€ und zahlt mit einem Fünf-Euro-Schein.

Gib an, wie viel Geld sie zurück erhält.

_____ €

Schreibe auf, wie du vorgehst.

Auswertung

RICHTIG	Angabe des richtigen Betrags 3,25 (€) und Darlegung des Lösungsweges. Dies kann in rechnerischer oder verbal beschreibender Form erfolgen. Z. B.: $5 \text{ €} - 5 \cdot 0,35 \text{ €} = 3,25 \text{ €}$ ODER 3,25 €. Ich habe von den 5 € den Preis der fünf Brötchen abgezogen. ODER 3,25 €. Ich habe 5 mal 0,35 € gerechnet und das Ergebnis von den 5 € abgezogen.
FALSCH	Alle anderen Antworten, z.B. 1,75 € ODER 3,25 €. Ich habe fünfmal 0,35 € gerechnet und dann 5 € abgezogen. ODER 3,25 € (Rechenweg fehlt)

Merkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Teilaufgabe 1.3

Reichen 10€, um zwölf normale Brötchen zu je 35Cent und zwölf Körnerbrötchen zu je 45Cent zu kaufen?

Kreuze an.

☐

Ja

☐

Nein

Begründe deine Antwort.

RICHTIG	Richtige Antwort (Ja) UND Begründung der Antwort durch Verweis auf den zur Verfügung stehenden Betrag und den Preis der Brötchen. Z. B.: Ja, die 10 € reichen, da die Brötchen zusammen 9,60 € kosten. ODER Ja, die 10 € reichen, denn es bleiben 40 Cent übrig. ODER $12 \cdot 0,35 \text{ €} = 4,20 \text{ €}$ und $12 \cdot 0,45 \text{ €} = 5,40 \text{ €}$. $4,20 \text{ €} + 5,40 \text{ €} = 9,60 \text{ €}$ ODER Ist der Ansatz korrekt und liegt jedoch ein „kleiner Rechenfehler“ vor, wird die Aufgabe als „Richtig“ gewertet.
FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten. Z. B.: Ja, das Geld reicht. Die Brötchen kosten weniger als 10 €.

Auswertung

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da es um einfache Rechnungen mit rationalen Zahlen geht. Zur Bearbeitung aller drei Teilaufgaben sind dem Text zunächst die nötigen Informationen zu entnehmen. Dabei stimmt bei Teilaufgabe 1.1 die Reihenfolge der Informationen im Text mit derjenigen der Rechenschritte, welche notiert werden müssen, direkt überein. Bei Teilaufgabe 1.2 und 1.3 ist es zusätzlich erforderlich, das Vorgehen darzulegen (K6). In allen Fällen müssen einfache Rechnungen mit Dezimalzahlen durchgeführt werden (K5).

Analyse der Aufgabe

Da es sich bei allen drei Teilaufgaben um einfache Rechnungen handelt und sich auch die Anforderungen an das Kommunizieren auf rein reproduktivem Niveau bewegen, gehören alle drei Teilaufgaben zum Anforderungsbereich I.

Zu 1.1, 1.3:

- Die Preis- und Stückangaben des Textes (Anzahl der Brötchen, Preis pro Brötchen) werden falsch kombiniert (Defizit bei [1.3] bzgl. K6).

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 1.2:

- Es wird lediglich der zu zahlende Preis berechnet, was daraufhin deutet, dass die Aufgabenstellung nur oberflächlich gelesen wurde (Defizit bzgl. K6).

Aufgabe 2: Literberechnungen

Teilaufgabe 2.1

Gib an, wie viel $\frac{3}{4}$ von 10 Liter sind.

_____ Liter

RICHTIG	7,5 Liter Anm.: Alle wertgleichen Angaben werden akzeptiert, z. B. $7 \frac{1}{2}$ Liter oder $\frac{15}{2}$ Liter.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: 0,75 ODER 75 Liter

Auswertung

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Merkmale

Teilaufgabe 2.2

$\frac{2}{3}$ von einem Volumen sind 6 Liter.

Gib an, wie groß das Volumen ist.

_____ Liter

Auswertung

RICHTIG	9 Liter Anm.: Alle wertgleichen Angaben werden akzeptiert. Z. B. $\frac{18}{2}$ Liter.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: 90 ODER 3

Merkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	III

Analyse der Aufgabe

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da die Bruchrechnung sachgerecht angewendet werden muss. Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 2.1 ist der Bruch $\frac{3}{4}$ als

Operator aufzufassen („ $\frac{3}{4}$ von“). Bei Teilaufgabe 2.2 muss rückwärts gearbeitet werden, d. h. ausgehend vom Anteil muss das Ganze bestimmt werden (K2). Die Rechnungen sind in beiden Fällen einfach (K5).

Da in beiden Teilaufgaben Routineverfahren angewendet werden können, gehören beide Teilaufgaben zum Anforderungsbereich I.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 2.1, 2.2:

- Die Bedeutung des Zählers und des Nenner wird vertauscht. So wird bei Teilaufgabe 2.1 beispielsweise durch 3 dividiert und dann mit 4 multipliziert (Defizit K5).
- „Von“ wird als wegnehmen gedeutet, so dass $6 - \frac{2}{3} = 5 \frac{1}{3}$ gerechnet wird (Defizit bzgl. K5).

Zu 2.2:

- Es wird fälschlich die Größe des Anteils berechnet, d. h. $\frac{2}{3}$ von 6 Litern bestimmt (Defizit bzgl. K2).

Aufgabe 3: Rechenvorteil

$$4 \cdot 3,15 \cdot 25 =$$

Wie kann Susanne einen Rechenvorteil nutzen, um diese Aufgabe ohne Nebenrechnung oder Taschenrechner zu lösen?

Rechne vor.

Auswertung

RICHTIG	Eine Berechnung (oder Beschreibung), die erkennen lässt, dass zunächst 4 mit 25 multipliziert wird. Das Endergebnis muss dabei nicht berechnet werden. Z. B.: $4 \cdot 25 \cdot 3,15$ ODER Susanne rechnet erst 4 mal 25 und das Ergebnis dann mal 3,15. ODER $100 \cdot 3,15$
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: Susanne rechnet: $4 \cdot 3 \cdot 25$

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	II

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da – unter Berücksichtigung von Rechenvorteilen – mit natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen gerechnet wird. Zur Bearbeitung der Aufgabe muss erkannt werden, dass das Produkt der beiden natürlichen Zahlen 100 ergibt und es demnach günstig ist, dieses Produkt zuerst zu berechnen (K2). Hilfreich ist dabei das Wissen, dass die Multiplikation einer Zahl mit 100 einer „Wert-Verschiebung“ im Stellenwertsystem um zwei Stellen entspricht (K5).

Aufgrund der Anwendung einer einfachen Strategie gehört diese Aufgabe zum Anforderungsbereich I.

Analyse der Aufgabe

Der Aspekt des Rechenvorteils bleibt unberücksichtigt. Die Rechnung wird von links nach rechts schriftlich notiert (Defizit bzgl. K2).

Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 4: Mathematikarbeit

Rolf sagt: „In der letzten Mathematikarbeit habe ich 48 von 60 Punkten erreicht, das sind der Gesamtpunktzahl.“

Welcher der folgenden Prozentsätze muss eingesetzt werden?

Kreuze an.

☐

12%

☐

12,5%

☐

48%

☐

60%

☐

80%

RICHTIG	5. Kästchen wurde angekreuzt
---------	------------------------------

Auswertung

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da es um die Berechnung eines Prozentsatzes geht. Bei der Bearbeitung der Aufgabe muss zunächst die Sachsituation erfasst werden (K3), wobei 48 von 60 Punkten als Anteil aufzufassen und anschließend der gesuchte Prozentsatz zu berechnen bzw. auszuwählen ist (K5).

Aufgrund der direkten Anwendbarkeit einfacher Routineverfahren sowie der Nutzung eines Standardmodells gehört diese Aufgabe zum Anforderungsbereich I.

Analyse der Aufgabe

- 1. Antwortalternative wurde angekreuzt: Der gesuchte Prozentsatz wird mit der Differenz zwischen der Gesamtpunktzahl und der erreichten Punktzahl gleichgesetzt. Dies legt nahe, dass keine adäquate Prozent-Vorstellung entwickelt ist.
- 2. Antwortalternative wurde angekreuzt: Hier wird vermutlich ein falsches Verhältnis gebildet: $60 : 48 = 1,25$ und dann in eine geeignet erscheinende Prozentangabe umgerechnet.

Mögliche Schwierigkeiten

- 3. Antwortalternative wurde angekreuzt: Hier wird der gesuchte Prozentsatz mit der absolut erreichten Punktzahl gleichgesetzt. Auch dies deutet auf eine nicht adäquat entwickelte Prozent-Vorstellung hin.
- 4. Antwortalternative wurde angekreuzt: Die Gesamtpunktzahl wird mit dem gesuchten Prozentsatz gleichgesetzt, was darauf hindeutet, dass der Text unkritisch gelesen worden ist.

Aufgabe 5: Weitsprung

In der Klasse 8a wird im Sportunterricht Weitsprung trainiert. Jeder Schüler hat drei Versuche. Die Sportlehrerin gibt die drei Sprungweiten in ein Tabellenkalkulationsprogramm ein und lässt für jeden Schüler die mittlere Weite berechnen.

So sieht die Tabelle für die zehn Mädchen der Klasse aus:

Weitsprung						
	A	B	C	D	E	F
1	Name	Vorname	Sprung 1 (in m)	Sprung 2 (in m)	Sprung 3 (in m)	mittlere Weite (in m)
2	Müller	Jacqueline	4,10	3,86	3,92	3,96
3	Frauenstein	Chantal	4,20	4,53	4,12	4,283333333
4	Yilmaz	Emine	3,90	3,75	4,10	3,916666667
5	Ostrovski	Anna	4,57	4,62	2,70	3,963333333
6	Berghoff	Dilara	3,20	4,52	3,65	3,79
7	Schulte	Lisa	3,56	3,85	3,99	3,8
8	Kaufmann	Sara	4,24	4,32	4,41	4,323333333
9	Li	Xin Xin	4,20	4,25	4,32	4,256666667
10	Meier	Vanessa	3,15	3,25	3,47	3,29
11	Homberg	Eva-Maria	3,52	2,20	3,70	3,14

Teilaufgabe 5.1

Beschreibe, wie die mittlere Weite in Spalte F berechnet wird.

Auswertung

RICHTIG	Eine Beschreibung, wie man den Mittelwert berechnet. Dies kann rechnerisch (auch an einem konkreten Beispiel) oder verbal beschreibend erfolgen. Z. B.: Ich addiere alle 3 Weiten und dividiere das Ergebnis dann durch drei. ODER Ich nehme den ersten Wert geteilt durch drei plus den zweiten Wert geteilt durch drei plus den dritten Wert geteilt durch drei. ODER Man zählt 4,10; 3,86 und 3,92 zusammen und teilt das Ganze dann durch drei. ODER Man zählt die Werte in den Spalten C, D, E zusammen und teilt sie dann durch 3. ODER $\frac{4,10 + 3,86 + 3,96}{3} = 3,96$ ODER (Grenzfall): Man bildet das arithmetische Mittel der Spalten C, D und E.
FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten. Z. B.: Man zählt 4,10; 3,86 und 3,92 zusammen.

Merkmale

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	III

Teilaufgabe 5.2

Die mittlere Weite in der Zelle F2 wurde mithilfe einer Formel berechnet. In dieser Formel wurden Zellenbezeichnungen wie C2, D2 und E2 als Variablen verwendet.

Gib eine passende solche Formel an.

RICHTIG	$F2 = \frac{C2 + D2 + E2}{3}$ ODER $\frac{C2 + D2 + E2}{3}$ ODER $(C2 + D2 + E2) : 3$ ODER $(C2 + D2 + E2)/3$ ODER =MITTELWERT(C:E) ODER =MITTELWERT(C;D;E) Anm.: Syntaxfehler sollen nicht gewertet werden.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: $F2 = \frac{4,10 + 3,86 + 3,92}{3}$ ODER $C2 + D2 + E2 : 3$

Auswertung

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	V

Merkmale

Teilaufgabe 5.3

Man kann in der Tabellenkalkulation vorgeben, mit wie vielen Nachkommastellen eine Zahl angezeigt werden soll.

Gib an, wie viele Nachkommastellen in Spalte F sinnvoll sind.

Begründe deine Antwort.

RICHTIG	2 Nachkommastellen werden als richtig gewertet UND angemessene Begründung. Z. B.: Da man Sprünge höchstens auf cm genau misst, sind zwei Nachkommastellen ausreichend. ODER Da nur auf zwei Nachkommastellen genau gemessen wurde, sind in Spalte F auch nur (höchstens) zwei Nachkommastellen sinnvoll. Anm.: Auch richtig, wenn analog mit der gemessenen Maßeinheit „cm“ argumentiert wurde. ODER In den Spalten C, D und E wurden nur 2 Stellen gemessen. ODER Bei Sprüngen haben die Millimeter keine Bedeutung mehr. So genau kann man gar nicht messen. ODER (Grenzfall): Man kann (mit einem Maßband) nur auf zwei Nachkommastellen genau messen. ODER (Grenzfall): 1 Nachkommastelle wird auch als richtig gewertet, wenn eine angemessene Begründung gegeben wird.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z.B.: 2 Nachkommastellen, mehr können nicht angezeigt werden. ODER Mit zwei Nachkommastellen ist es am übersichtlichsten. ODER Restliche Ziffern sind unnötig.

Auswertung

Merkmale	Leitidee	Zahl (L1)
	Allgemeine Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
	Anforderungsbereich	II
	Kompetenzstufe	V

Teilaufgabe 5.4

Die Sportlehrerin sagt: „Sara ist die beste Weitspringerin der Klasse.“ Marc protestiert: „Nein, Anna ist viel besser.“

Nenne ein Argument dafür, dass Anna die beste Weitspringerin der Klasse ist.

Auswertung	RICHTIG Ein nachvollziehbares Argument dafür, dass Anna die beste Weitspringerin der Klasse ist, wird gegeben. Anm.: Vereinfachend darf angenommen werden, dass Sara, falls sie nicht die Beste ist, zumindest als zweitbeste angesehen werden darf. Daher reicht auch ein direkter Vergleich mit Sara aus (statt eines Vergleichs mit den Schülern der ganzen Klasse). Z. B.: Anna ist die beste, da sie den weitesten Sprung von allen hat. ODER Anna ist besser, da sie zweimal am weitesten gesprungen ist (bzw. weiter als Sara) und nur beim dritten Sprung schlecht abgeschnitten hat. ODER Sara ist NUR in der mittleren Weite besser als Anna. ODER Anna ist einmal 4,62 m gesprungen.
	FALSCH Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten. Z. B.: Anna hat nur einen schlechten Sprung. ODER Sara ist besser als Anna. ODER Sara ist besser, weil ihre mittlere Weite besser ist. ODER Anna ist IMMER weiter als Sara gesprungen. ODER Anna ist nicht die beste Weitspringerin, denn sie ist im dritten Sprung nur 2,70 m weit gesprungen. ODER Anna ist nicht die beste Weitspringerin, da sie im Mittel nicht so weit wie z. B. Sara gesprungen ist.

Merkmale	Leitidee	Zahl (L1)
	Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
	Anforderungsbereich	III
	Kompetenzstufe	II

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da mit rationalen Zahlen in einem Anwendungskontext gearbeitet wird. Bei den Teilaufgaben 1, 2 und 4 sind durch den Mittelwertbegriff außerdem inhaltliche Kompetenzen der Leitidee Daten und Zufall (L5) von Bedeutung. Zur Bearbeitung der Aufgabe sind der Tabelle zunächst die wichtigen Informationen zu entnehmen (K4), wobei insbesondere der Begriff „mittlere Weite“ mathematisch korrekt gedeutet werden muss (K6).

In Teilaufgabe 5.1 wird die Berechnung der mittleren Weite verbal oder mittels einer Formel beschrieben (K5, K6), in Teilaufgabe 5.2 ist konkret nach einer Formel gefragt (K5). Hierzu müssen sich die Schülerinnen und Schüler zunächst die Bedeutung der angegebenen Variablen anhand der Tabelle erschließen (K3, K4). In Teilaufgabe 5.3 kann die Genauigkeit bei der Angabe des Mittelwertes unter Berücksichtigung der Sachsituation oder auch rein innermathematisch beurteilt werden, in

dem darauf verwiesen wird, dass das Ergebnis einer Mittelwertberechnung sicherlich nicht genauer sein kann als der ungenaueste Eingangswert (K5). In Teilaufgabe 5.4 setzen sich die Schülerinnen und Schüler kritisch mit den beiden gegebenen Aussagen auseinander. Sie analysieren, dass „beste“ sich auf „größte Einzelweite“ oder „größte mittlere Weite“ beziehen kann, die Aussagekraft des Mittelwertes allein also begrenzt ist (K1, K3).

Aufgrund der rein reproduktiven Anforderungen kann die Teilaufgabe 5.1 dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden. Teilaufgabe 5.2 gehört dem Anforderungsbereich II an, da diese den verständigen Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen erfordert. Teilaufgabe 5.3 gehört ebenfalls dem Anforderungsbereich II an, denn sie verlangt die Auseinandersetzung mit dem Verfahren zur Berechnung der mittleren Weite bzw. deren inhaltlicher Bedeutung in der vorgegebenen Sachsituation. Teilaufgabe 5.4 gehört dem Anforderungsbereich III an, da hier eine kritische Auseinandersetzung mit der mittleren Weite als Kriterium der Leistungsbeurteilung gefordert ist.

Zu 5.1:

Mögliche Schwierigkeiten

- Zur Berechnung der mittleren Weite werden die einzelnen Größen falsch miteinander verbunden, wie die folgende Schülerlösung beispielhaft belegt (Defizit bzgl. K5).

Teilaufgabe 1: Weitsprung

Beschreibe, wie die mittlere Weite in Spalte F berechnet wird.

$$\frac{C \cdot D \cdot E}{3} = F$$

Zu 5.2:

- Bei der Angabe der Formel werden die Regeln für den Umgang mit Klammern nicht berücksichtigt, wie folgende Schülerlösung verdeutlicht (Defizit bzgl. K5).

Teilaufgabe 2: Weitsprung

Die mittlere Weite in der Zelle F2 wurde mithilfe einer Formel berechnet. In dieser Formel wurden Zellenbezeichnungen wie C2, D2 und E2 als Variablen verwendet.

Gib eine passende solche Formel an.

$$C2 + D2 + E2 : 3$$

Zu 5.3:

- Anhand der beiden folgenden Schülerlösungen wird deutlich, dass der Sinn der Anzahl der Nachkommastellen nicht hinterfragt wird (Defizit bzgl. K3 oder K5).

2
Begründe deine Antwort.
Weil man immer auf zwei Nachkommastellen aufrundet.

Oder

zwei
Begründe deine Antwort.
Weil man so viel schneller sagen kann wer den besten Durchschnittswert hat

Zu 5.4:

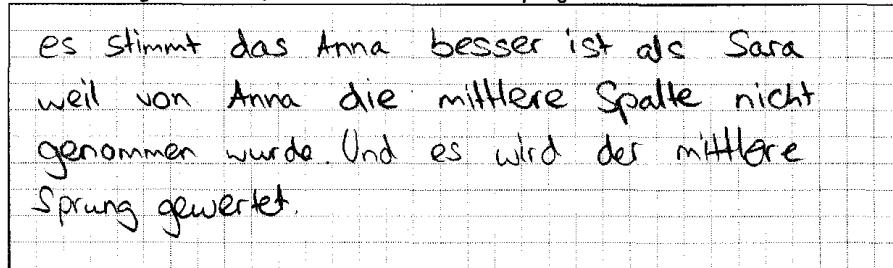
- Die folgende Schülerlösung legt zwei Interpretationen nahe.

So können falsche (oder keine) Vorstellung vom Begriff der mittleren Weite vorliegen, da diese mit dem Ergebnis des zweiten Sprungs gleichgesetzt wird und Anna demnach besser als Sara ist (Defizit bzgl. K3). Andererseits könnte aber vielleicht auch eine durchaus richtige Einsicht unverständlich wiedergegeben worden sein (Defizit bzgl. K6).

Teilaufgabe 4: Weitsprung

Die Sportlehrerin sagt: „Sara ist die beste Weitspringerin der Klasse.“ Marc protestiert: „Nein, Anna ist viel besser.“

Nenne ein Argument dafür, dass Anna die beste Weitspringerin der Klasse ist.



es stimmt das Anna besser ist als Sara weil von Anna die mittlere Spalte nicht genommen wurde. Und es wird der mittlere Sprung gewertet.

Anregungen für den Unterricht

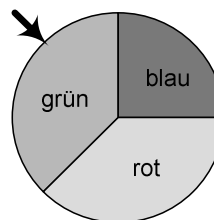
Die Aufgabe kann von den Schülerinnen und Schülern auch bearbeitet werden, wenn keine Erfahrungen in der Arbeit mit Tabellenkalkulationsprogrammen vorliegen. Hier sollten jedoch weitere Aufgaben dieser Art Gegenstand des Unterrichts sein. Dabei kann insbesondere der Aspekt „Adressieren von Zellen“ aufgegriffen werden. Dies kann über eine Schatzsuche, der Arbeit mit Koordinatensystemen oder Stadtplänen geschehen. Mit Bezug zu diesen Beispielen kann gut verdeutlicht werden, dass auch bei der Arbeit mit einem Tabellenkalkulationsprogramm zwei Angaben benötigt werden. In einem nächsten Schritt kann von den konkreten Inhalten abstrahiert und auf eine Formel mit Platzhaltern hingearbeitet werden.

Die Arbeit mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ermöglicht es außerdem, die Formel zur Berechnung des Mittelwertes in verschiedenen Anwendungssituationen und mit unterschiedlichen Zahlenwerten aufstellen und anwenden zu lassen. Dabei kann der Mittelwert und dessen Aussagekraft auch durch das Einzeichnen der entsprechenden Geraden in einem Säulendiagramm veranschaulicht werden. Auch die Genauigkeit der Ergebnisse, d. h. ein mit Bezug zur jeweiligen Sachsituation sinnvolles Runden kann in diesem Rahmen thematisiert werden. Insbesondere für leistungstärkere Schüler kann als weiterführender Aspekt die Ausreißeranfälligkeit des Mittelwertes betrachtet und diese leicht mit der des Medians (Zentralwertes) verglichen werden.

Aufgabe 6: Glücksrad

Ein Glücksrad besteht aus drei Feldern: einem roten, einem grünen und einem blauen Feld.

Bei 180 Drehungen wies der Zeiger nach dem Stillstand des Glücksrades 66-mal auf das rote Feld und 54-mal auf das grüne Feld.



Teilaufgabe 6.1

Wie oft zeigte der Zeiger auf das blaue Feld?

Kreuze an.

☐

240-mal

☐

120-mal

☐

60-mal

☐

Das kann ich nicht entscheiden, weil das ja Zufall ist.

RICHTIG	3. Kästchen wurde angekreuzt
---------	------------------------------

Auswertung

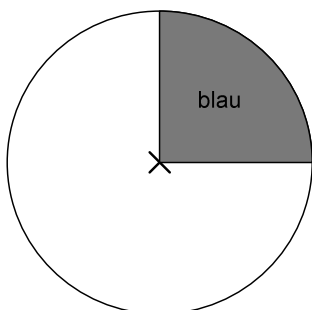
Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Merkmale

Teilaufgabe 6.2

Die Aufteilung der Felder im Glücksrad soll so verändert werden, dass der Zeiger bei etwa jeder zweiten Drehung auf dem grünen Feld steht.

Ergänze die Zeichnung.



RICHTIG	Etwa die Hälfte der eingezeichneten Sektoren ist grün gefärbt. Richtig ist dabei auch, wenn das Glücksrad in vier Viertel, sechs Sechstel etc. eingeteilt wird, von denen jeweils die Hälfte „grün“ markiert oder entsprechend beschriftet wird.
---------	--

Auswertung

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	II

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da die Auseinandersetzung mit einem Zufallsgerät im Mittelpunkt steht. Es sind Aussagen zur Häufigkeit der einzelnen Ergebnisse zu formulieren. Dabei ist das Gerät gezielt so zu verändern, dass ein vorgegebenes Ereignis mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eintritt.

Analyse der Aufgabe

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 6.1 ist eine einfache Routinerechnung durchzuführen (K5). Bei Teilaufgabe 6.2 muss man sich zunächst klarmachen, dass die Anzahl der Treffer auf den einzelnen Farben von der Größe der Felder abhängt. Dabei wird „etwa jede zweite Drehung“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% gleichgesetzt, weshalb das Glücksrad zur Hälfte grün sein muss (K3). Die vorliegende Sachsituation muss also an das zugrunde liegende Modell angepasst werden, d. h. das Glücksrad ist entsprechend zu färben, wobei die Verteilung der grünen Fläche viele Lösungen zulässt (K3, K4).

Aufgrund der Durchführung von Routinerechnungen und der direkten Anwendbarkeit grundlegender Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I an.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 6.1:

- 1. Antwortalternative wurde angekreuzt: Die Anzahl der Drehungen „blau“ wird zunächst vermutlich richtig berechnet, das Ergebnis wird dann aber zu den bereits erfolgten Drehungen addiert. (Defizit bzgl. K3).
- 2. Antwortalternative wurde angekreuzt: Hier wird offenbar die Gesamtzahl der Drehungen „rot“ und „grün“ berechnet (Defizit bzgl. K3).
- 4. Antwortalternative wurde angekreuzt: Die Prognose über den Ausgang eines Zufallsversuchs wird mit der Analyse eines bereits abgeschlossenen Zufallsversuchs, wie er hier vorliegt, verwechselt.

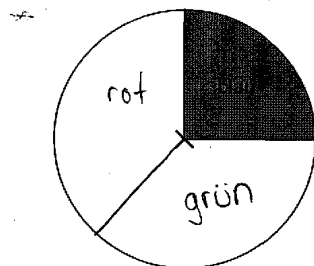
Zu 6.2:

- Das blaue Feld wird vernachlässigt. Es wird gefolgert, dass das rote und das grüne Feld gleich groß sein müssen, damit der Zeiger bei jeder zweiten Umdrehung auf dem grünen Feld stehen bleibt. Dies zeigt die folgende Schülerlösung (Defizit bzgl. K3).

Teilaufgabe 2: Glücksrad

Die Aufteilung der Felder im Glücksrad soll so verändert werden, dass der Zeiger bei etwa jeder zweiten Drehung auf dem grünen Feld steht.

Ergänze die Zeichnung.



Anregungen für den Unterricht

Derartige Aufgaben (hier Teilaufgabe 6.2) ermöglichen den Schülerinnen und Schülern das – oft vernachlässigte – Rückwärtsarbeiten, da sie das Glücksrad einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit anpassen müssen. Hierdurch wird die Auseinandersetzung mit der Sachsituation intensiver und Zusammenhänge treten deutlicher hervor. Häufig sind diese Aufgaben so angelegt, dass die Schülerinnen und Schüler durch ein erneutes Vorwärtsarbeiten ihre Lösung selbstständig überprüfen können.

Dies ist auch bei der folgenden Aufgabe der Fall, die leicht als weitere Teilaufgabe ergänzt werden kann.

Weiterführende Aufgabe

Verändere die Färbung des Glücksrades so, dass die Farben blau, grün und rot mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten gedreht werden.

Farbe	rot	gelb	blau
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$

Vergleichbare Aufgabensets lassen sich zum Üben auch leicht zu Murmeln, Losen oder Würfeln erstellen, wie das folgende Beispiel zeigt.

In einer Urne befinden sich 7 blaue, 4 rote und 5 gelbe Murmeln. Es wird einmal gezogen.

1.

Gib an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, eine gelbe Murmel zu ziehen.

2.

Gib an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, eine rote oder eine blaue Murmel zu ziehen.

3.

Gib an, wie viele rote, gelbe und blaue Murmeln in einer Urne liegen müssen, damit die farbigen Murmeln jeweils mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit gezogen werden.

Farbe	rot	gelb	blau
Wahrscheinlichkeit	$\frac{8}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Aufgabe 7: Restaurantgewinnspiel

Jedes Jahr in der Weihnachtszeit veranstaltet ein Restaurant ein Gewinnspiel. Der Wirt füllt dazu 100 Kugeln mit den Nummern 1 bis 100 in ein undurchsichtiges Gefäß und deckt dieses mit einem Tuch ab. Ein Gast, der die Rechnung bekommt, muss eine Zahl zwischen 1 und 100 nennen und dann, ohne hinzusehen, eine Kugel ziehen. Er zeigt dem Wirt die Nummer auf der Kugel und legt die Kugel wieder in das Gefäß zurück.

Teilaufgabe 7.1

Stimmt die Nummer der gezogenen Kugel mit der vom Gast genannten Zahl überein, muss der Gast die Rechnung nicht bezahlen.

Prüfe, ob die folgenden Aussagen richtig sind.

Kreuze jeweils an.

	richtig	falsch
Durchschnittlich jede einhundertste Rechnung muss nicht bezahlt werden.	☐	☐
Bei 100 Gästen darf mit Sicherheit einer umsonst essen.	☐	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Rechnung nicht bezahlt werden muss, liegt bei 1 %.	☐	☐
Jeden Abend muss mindestens ein Gast sein Essen nicht bezahlen.	☐	☐

RICHTIG		richtig	falsch
	Durchschnittlich jede einhundertste Rechnung muss nicht bezahlt werden.	☒	☐
	Bei 100 Gästen darf mit Sicherheit einer umsonst essen.	☐	☒
	Die Wahrscheinlichkeit, dass die Rechnung nicht bezahlt werden muss, liegt bei 1 %.	☒	☐
	Jeden Abend muss mindestens ein Gast sein Essen nicht bezahlen.	☐	☒

Auswertung

Merkmale	Leitidee	Daten und Zufall (L5)
	Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
	Anforderungsbereich	II
	Kompetenzstufe	IV

Teilaufgabe 7.2

Enthält die Nummer auf der Kugel mindestens einmal die „Glücksziffer“ 7, bekommt der Gast einen Cappuccino gratis serviert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Cappuccino gratis zu bekommen?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{7}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{19}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{7}{10}$

Auswertung	RICHTIG	3. Kästchen wurde angekreuzt.
------------	---------	-------------------------------

Merkmale	Leitidee	Daten und Zufall (L5)
	Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
	Anforderungsbereich	II
	Kompetenzstufe	V

Teilaufgabe 7.3

Der Wirt verrät einem Gast, dass an diesem Abend leider noch niemand gewonnen hat. Der Gast freut sich: „Prima, dann habe ich ja jetzt besonders gute Chancen.“

Hat der Gast Recht?

Kreuze an.

☐ Ja	☐ Nein
-----------------------------	-------------------------------

Begründe deine Antwort.

Auswertung	RICHTIG „Nein“ wird angekreuzt UND in der Begründung wird auf die sich nicht verändernde Ausgangssituation, warum jeder Gast dieselbe Gewinnwahrscheinlichkeit hat, Bezug genommen. Z. B.: Dies ist so, weil immer die gleichen 100 Kugeln im Behälter sind. Damit ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen bei jedem Gast gleich. ODER Dies ist so, weil die Kugeln immer wieder zurückgelegt werden und die nächste Kugel nicht weiß, welche vorher gezogen wurde. („Der Zufall hat kein Gedächtnis.“) ODER Es bleiben immer gleich viele Kugeln im Behälter. Also bleibt die Wahrscheinlichkeit immer unverändert. ODER Es stimmt nicht, da er auch keine anderen Bedingungen hat als die anderen, die nicht gewonnen haben. ODER Das stimmt nicht, da die Gewinnwahrscheinlichkeit für jeden Gast 1 % beträgt, egal ob schon viele verloren haben. ODER Weil die Kugel immer wieder zurückgelegt wird. ODER (Grenzfall) Es hat nichts damit zu tun, ob heute schon jemand gewonnen hat.
------------	--

FALSCH	Alle anderen Antworten, Z. B.: Der Gast hat nicht Recht, weil die Wahrscheinlichkeit immer gleich bleibt. Anm.: Ausführungen, <i>warum</i> die Wahrscheinlichkeit unverändert bleibt, fehlen. Wäre die Wahrscheinlichkeit mit 1 % genauer spezifiziert, wird die Aufgabe als richtig gewertet. ODER Die Behauptung ist falsch, weil die Kugeln immer neu gemischt werden, die Chancen also für jeden gleich sind. Anm.: Ausführungen, <i>warum</i> die Wahrscheinlichkeit unverändert bleibt, fehlen. ODER Man weiß ja nicht, wie viele Gäste da waren, vielleicht waren es nur zwei, dann ist die Chance sehr gering. ODER Er hat Recht, weil sich durch viele Fehlzüge die Chance zu gewinnen erhöht. ODER Es ist Zufall, ob man gewinnt oder nicht. ODER Es ist sehr unwahrscheinlich, dass der Gast etwas gewinnt.
--------	---

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	III

Merkmale

Analyse der Aufgabe

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es um Zufallsphänomene in Realsituationen, die Berechnung zugehöriger Wahrscheinlichkeiten und die Beurteilung von Wahrscheinlichkeitsaussagen geht.

Zu Beginn ist die Beschreibung des Gewinnspiels zu lesen (K6). Dabei wird ein mentales Modell gebildet, das die Gewinnspielsituation als „Ziehen mit Zurücklegen“ mit ihren verschiedenen Ausgängen erfasst (K3). Auf der Grundlage dieses Modells sind in Teilaufgabe 7.1 die einzelnen Aussagen zu prüfen, die verschiedene richtige und falsche Deutungen der Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn, d. h. für das Nichtbezahlen der Rechnung, aufgreifen. Ein Verstehen der einzelnen Aussagen stellt deutliche Anforderungen an das Kommunizieren (K6), da zentrale und bedeutungstragende Begriffe, wie z. B. „durchschnittlich“, „mit Sicherheit“ und „mindestens“ erkannt und interpretiert werden müssen.

Teilaufgabe 7.2 erfordert ebenfalls zunächst die Kompetenz Kommunizieren (K6), da in einem ersten Schritt die Formulierung „mindestens einmal die Glücksziffer 7“ erfasst (K6) und im vorliegenden Modell gedeutet werden muss. Die Anwendung einer Zählstrategie hilft, die Anzahl der günstigen Ergebnisse unter allen möglichen zu bestimmen (K2). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann dann unter Rückgriff auf die Laplace-Definition durch Quotientenbildung errechnet und im Kontext gedeutet werden (K5, K3).

In Teilaufgabe 7.3 müssen die Schülerinnen und Schüler die Feststellung des Gastes lesen (K6) und dessen Äußerung im Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ deuten und überprüfen (K3). Das Ergebnis dieser Überprüfung müssen sie schließlich argumentativ darlegen (K1) und dabei zeigen, dass sie erfasst haben, dass für jeden Gast die Gewinnchance gleich bleibt. In der Begründung kann auf die unverändert bleibende Anzahl der Kugeln im Gefäß (jeder Gast hat die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit) oder auf die Eigenschaften der Zufälligkeit des Ziehens Bezug genommen werden.

Alle drei Teilaufgaben können dem Anforderungsbereich II zugeordnet werden. In den Teilaufgaben 7.1 und 7.3 ist dies wesentlich durch die kognitiven Anforderungen an das Modellieren begründet, in Teilaufgabe 7.2 eher durch die Anforderungen an das Entwickeln einer passenden Zählstrategie.

Zu 7.1:

- 1. Zeile: falsch wurde angekreuzt: Ein Missachten von „durchschnittlich“ oder eine Fehlvorstellung vom Wahrscheinlichkeitsbegriff kann zur Fehldeutung dieser Häufigkeitsaussage führen (Defizit bzgl. K6).
- 2. Zeile: richtig wurde angekreuzt: Die vorliegende Deutung als Häufigkeit wird mit einer Fehldeutung der Wahrscheinlichkeit verknüpft. Dabei wird die Zufälligkeit des Ereignisses missachtet (Defizit bzgl. K3).
- 3. Zeile: falsch ist angekreuzt: Die Modellierung der Situation mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit von 1 % gelingt nicht (Defizit bzgl. K3).
- 4. Zeile: richtig wurde angekreuzt: Die Sicherheit des Eintretens eines Ereignisses wird überschätzt (Defizit bzgl. K3), oder die Aussage wird falsch verstanden (Defizit bzgl. K6).

Zu 7.2:

- 1. Antwortalternative wurde angekreuzt: Die „Glücksziffer 7“ wird mit der Anzahl der günstigen Ergebnisse verwechselt (Defizit bzgl. K3).
- 2. Antwortalternative wurde angekreuzt: Beim Zählen der günstigen Ergebnisse werden nur die Zahlen 7, 17, 27, 37, ..., 87, 97 berücksichtigt (Defizit bzgl. K2).
- 4. Antwortalternative wurde angekreuzt: Beim Ermitteln der Anzahl der günstigen Ergebnisse 7, 17, ..., 70, 71, ... 78, 79, 87, 97 wird die Zahl 77 doppelt gezählt (Defizit bzgl. K2).
- 5. Antwortalternative wurde angekreuzt: Der Bruch wird bezüglich der Anzahl der Ziffern als „Günstige durch Mögliche“ gedeutet (Defizit bzgl. K3, K6).

Zu 7.3:

- Es wird erkannt, dass die Aussage des Gastes falsch ist. Die Begründung ist jedoch lückenhaft, da nicht ausreichend Bezug auf die konkrete Gewinnsituation genommen wird (Defizit bzgl. K1).
- Die vorliegende Situation wird fehlerhaft als „Ziehen ohne Zurücklegen“ gedeutet, wie diese Schülerlösung exemplarisch zeigt (Defizit bzgl. K3).

Kreuze an.



Ja



Nein

Begründe deine Antwort.

Viele Karten wurden schon rausgezogen, also vergrößert sich die Chance ein Gewinn zu ziehen

- Die Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes gelingt nicht, d. h. die Zufälligkeit des Ziehens wird nicht erkannt (s. nächste Schülerlösung) (Defizit bzgl. K3).

Kreuze an.



Ja



Nein

Begründe deine Antwort.

Weil ein Gast von 100 muss gewinnen.

- Das Modellieren der Gewinnsituation gelingt nicht. Beispielsweise wird diese mit der Situation verwechselt, dass ein Gast sich eine Gewinnzahl überlegen muss und er nur dann gewinnt, wenn diese Zahl auch gezogen wird (Defizit bzgl. K6, K3).

Bei dieser Aufgabe bereitet zum einen die Analyse der beschriebenen Gewinnspiel-situation (Ziehen mit oder ohne Zurücklegen?) Schwierigkeiten. Zum anderen liegen Ursachen für Fehllösungen wohl in ungenügend ausgebildeten Grundvorstellungen vom Wahrscheinlichkeitsbegriff. Zu diesen beiden Bereichen geben die nachfolgenden Ausführungen Anregungen.

Erkennen die Schülerinnen und Schüler nicht, ob es sich beim Restaurantgewinnspiel um Ziehen mit oder ohne Zurücklegen handelt, haben sie vermutlich Probleme mit dem Dekodieren der sprachlichen Situationsbeschreibung. Für Hinweise zum Umgang mit solchen sprachlichen Schwierigkeiten wird hier auf das Modul D zur Kompetenz Kommunizieren verwiesen.

Im Unterricht können mit den Schülerinnen und Schülern beide Modellierungen dieser Situation als „Ziehen mit Zurücklegen“ und als „Ziehen ohne Zurücklegen“ mit ihren Auswirkungen erarbeitet werden. Da hier mit 100 Kugeln gearbeitet wird und die Gewinnwahrscheinlichkeit sich anfangs bei beiden Modellierungen nur unwesentlich unterscheidet, bietet sich eine Vereinfachung der Situation an. Dazu kann das Restaurantgewinnspiel beispielsweise mit nur fünf Kugeln in zwei Varianten simuliert werden, wie nachfolgend am Beispiel der weiterführenden Aufgabe gezeigt wird.

Für ein Gewinnspiel werden fünf Kugeln in ein undurchsichtiges Gefäß gelegt. Die Kugeln sind mit den Buchstaben A, B, C, D und E beschriftet. Vor dem Ziehen muss man einen dieser fünf Buchstaben nennen. Dann zieht man ohne hinzusehen eine Kugel. Man gewinnt, wenn die Kugel den zuvor genannten Buchstaben zeigt.

Weiterführende Aufgabe

Variante 1 (Ziehen ohne Zurücklegen)

Man zeigt die Kugel und legt sie anschließend zur Seite.

Variante 2 (Ziehen mit Zurücklegen)

Man zeigt die Kugel und legt sie anschließend wieder ins Gefäß zurück.

Beide Varianten dieses Gewinnspiels werden mehrere Male durchgeführt und es wird bei jedem Zug protokolliert, ob ein Gewinn eintritt oder nicht. Bei Variante 1 wird schnell klar, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeit nach jedem Zug ändert.

Variante 2 kann genauer untersucht werden, indem die Aussagen aus Teilaufgabe 7.1 darauf abgestimmt und dann auf ihre Richtigkeit untersucht werden. Folgende Aussagen könnte man dann anhand dieser strukturgleichen Situation jeweils begründet einschätzen lassen:

	wahr	falsch
Durchschnittlich jede fünfte Kugel zeigt den genannten Buchstaben.	☐	☐
Bei fünf Ziehungen ist mit Sicherheit einmal der richtige Buchstabe dabei.	☐	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die richtige Kugel gezogen wird, beträgt 20 %.	☐	☐
In diesem Spiel wird mindestens einmal die richtige Kugel gezogen.	☐	☐

Eine solche strukturgleiche Situation mit kleinerem Ergebnisraum gestattet es, sämtliche möglichen Spielausgänge genauer zu analysieren. Legt man beispielsweise fest, dass nur das Ziehen der Kugel E zum Gewinn führt, kann problematisiert werden, dass der Zufall „kein Gedächtnis“ hat. Beim Nachspielen dieser Situation im Klassenraum kann man sich dann vorstellen, dass eine Person im Verlauf des Spiels erst später hinzukommt, also nicht wissen kann, wie häufig die Gewinnkugel bereits gezogen wurde. So lässt sich verdeutlichen, dass für diese Person die Ge-

winnwahrscheinlichkeit genauso groß ist wie für die anderen, die bereits vorher gespielt haben.

Um zu vertiefen, dass das Restaurantgewinnspiel auf dem Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ beruht, kann die Fragestellung auch mit dem Werfen eines Würfels simuliert werden. Anhand vereinfachter Spielsituationen, bei denen der gesamte Ergebnisraum vollständig notiert und die Ergebnisse „vieler“ Spieldurchführungen protokolliert werden können, kann auch ein Bezug zu den verschiedenen Grundvorstellungen vom Wahrscheinlichkeitsbegriff hergestellt werden. In diesem Beispiel mit dem Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ bietet sich ein Bezug zur Symmetrie-Vorstellung (Laplace-Ansatz) und zur Häufigkeitsvorstellung an. Dies wird am vereinfachten Beispiel mit den fünf Kugeln nachfolgend erläutert. Die fünf mit Buchstaben beschrifteten Kugeln bilden die fünf Elementarereignisse A, B, C, D und E, deren jeweiliges Ziehen gleichwahrscheinlich ist. Von dieser Symmetrieüberlegung ausgehend kann man vor dem Ziehen fragen: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit dem Buchstaben E zu ziehen?“. Um die Häufigkeitsvorstellung zu fördern, kann man das vereinfachte Spiel „sehr häufig“ durchführen und dabei die Ergebnisse protokollieren (dies kann auch gut rechnerunterstützt erfolgen). So kann man implizit das Gesetz der großen Zahlen nutzen, um schließlich gute Schätzer für die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

Auf der Grundlage eines vertieften Verständnisses von der Situation des Restaurantgewinnspiels kann zusätzlich auch die folgende weiterführende Aufgabe behandelt werden. Vor der Ermittlung der neuen Gewinnwahrscheinlichkeit kann überlegt und mit Bezug zur Situation begründet werden, ob die gesuchte Wahrscheinlichkeit höher oder niedriger als die andere sein müsste.

Weiterführende Aufgabe

Gehen zwei Personen zusammen essen und haben eine gemeinsame Rechnung, gilt eine andere Spielregel:

Sie dürfen zusammen nur eine Kugel ziehen. Wenn auf der Kugel eine Zahl mit zwei gleichen Ziffern steht, muss nur eines der beiden Essen bezahlt werden.

Ergänze:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen nur ein Essen bezahlen müssen, beträgt _____.“

Aufgabe 8: Fische zählen

In einem großen Teich soll die Anzahl der Fische abgeschätzt werden. Dazu werden aus dem Teich 250 Fische gefangen, mit einem roten Punkt gekennzeichnet und wieder in den Teich freigelassen. Die Wahrscheinlichkeit, einen gekennzeichneten Fisch zu fangen, ist nun

$$p(\text{Fisch mit rotem Punkt fangen}) = \frac{\text{Anzahl der Fische mit rotem Punkt}}{\text{Anzahl aller Fische (markierte und nicht markierte)}} = \frac{250}{x}$$

x : Gesamtzahl der Fische im Teich

An einem anderen Tag werden 400 Fische gefangen. Von diesen 400 Fischen sind 50 mit einem roten Punkt markiert.

Gib an, wie viele Fische schätzungsweise in dem Teich leben.

Auswertung

RICHTIG	2000
---------	------

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	V

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es um Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten geht.

Analyse der Aufgabe

Zur Bearbeitung der Aufgabe sind dem Aufgabentext zunächst die nötigen Sachinformationen zu entnehmen, insbesondere der Hinweis zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, einen Fisch mit einem roten Punkt zu fangen (K6). Auf dieser Grundlage kann anschließend eine Gleichung aufgestellt werden, welche den Sachzusammenhang modelliert (K3). Hierzu muss erkannt werden, dass unabhängig von der jeweiligen Stichprobengröße die Verhältnisse „Anzahl der Fische mit rotem Punkt“ zu „Anzahl aller Fische“ untereinander immer gleich sein müssen; dies setzt einen adäquaten Wahrscheinlichkeitsbegriff voraus. Das Umformen der aufgestellten Gleichung (K5) liefert die Anzahl der Fische, die schätzungsweise in dem Teich leben.

Aufgrund der Mehrschrittigkeit beim Vorgehen und der Verwendung inhaltlicher Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit gehört diese Aufgabe zum Anforderungsbereich II.

Es wird nicht erkannt, dass die beiden Verhältnisse $250/x$ und $50/400$ gleich sein müssen, so dass keine geeignete Gleichung aufgestellt werden kann (Defizit bzgl. K3).

Mögliche Schwierigkeiten

Die aufgestellte Gleichung kann nicht richtig nach x (Gesamtzahl der Fische in einem Teich) umgeformt werden (Defizit bzgl. K5).

Aufgabe 9: Tarifvergleich

Die folgende Grafik stammt aus einer Anzeige eines Mobilfunkanbieters.

Jeder Tarif hat eine bestimmte monatliche Grundgebühr und bietet dafür eine bestimmte Anzahl von „All-in“-Einheiten (Inklusiveinheiten) pro Monat.



Teilaufgabe 9.1

Verena meint: „Die Höhen der Säulen in der Anzeige stimmen nicht.“

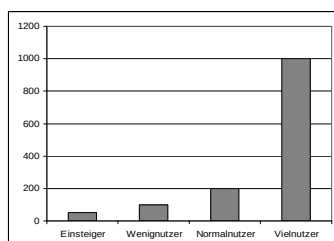
Erläutere, was sie damit meint.

RICHTIG	Eine richtige Antwort umfasst mindestens eine der folgenden Wertungen: • die Höhe der Säulen passt nicht zu den angegebenen Inklusiveinheiten. • die Höhe der Säulen passt nicht zu den angegebenen Grundgebühren. Anm.: Es muss eine Relation hergestellt werden, d. h. es müssen mind. 2 Säulen miteinander verglichen werden. Z. B.: Sie meint, dass die 100er-Säule eigentlich doppelt so hoch wie die 50er-Säule sein müsste, und die 200er-Säule doppelt so hoch wie die 100er-Säule sein. Die 1000er-Säule müsste 5mal so hoch wie die 200er-Säule sein. ODER Die Säulen haben alle denselben Abstand in der Höhe. ODER (Grenzfall) Der Unterschied z. B. der 200er-Säule und der 1000er-Säule ist viel zu niedrig. ODER (Grenzfall) Die Unterschiede zwischen den Säulen sind viel zu klein. Anm.: Idee der Relation ist erkennbar.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: Die letzte Säule hätte größer sein sollen. Anm.: Vergleich zu wenigstens einer anderen Säule fehlt.

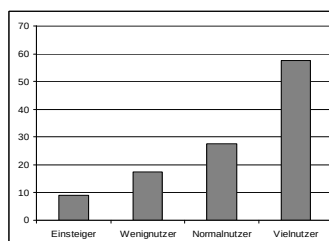
Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	IV

Teilaufgabe 9.2

Verena hat zwei eigene Grafiken entworfen.



Grafik 1



Grafik 2

Erläutere, was Verena in Grafik 1 und in Grafik 2 darstellt.

Grafik 1	
Grafik 2	

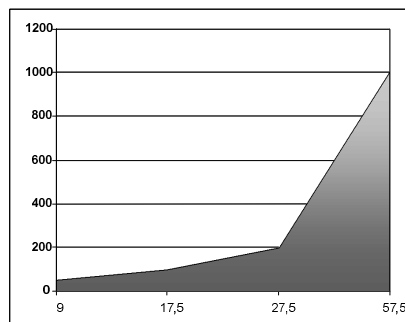
RICHTIG	Grafik 1: Dargestellt wird die Anzahl der Inklusiveinheiten in den einzelnen Tarifen. Grafik 2: Dargestellt werden die Grundgebühren (in €) der einzelnen Tarife. Gleichbedeutende Formulierungen werden ebenfalls als richtig kodiert. Für „Inklusiveinheiten“ sind dies z. B. „All-in“-Einheiten, „Einheiten, die man nicht bezahlen muss“, „Freieinheiten“ oder „Einheiten“ etc. Für „Grundgebühren“ sind dies z. B. „Grundpreis pro Monat“, „Was man jeden Monat zahlen muss, auch wenn man nicht telefoniert“, „Was sowieso auf der Rechnung steht“, „Preis pro Monat“, „Preis der Tarife“ oder „Mindestpreis“ etc. Anm.: Die bloße Angabe „Preis“ oder „Euro“ reicht nicht aus.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: Grafik 2 stellt den Preis dar. ODER Grafik 1 stellt die Menge dar, Grafik 2 die Euro.

Leitidee	Daten und Zufall (L5)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	V

Merkmale

Teilaufgabe 9.3

Verena hat eine dritte Grafik entworfen.



Grafik 3

Grafik 3 vermittelt einen sachlich nicht ganz richtigen Eindruck.

Erläutere, woran das liegt.

	Eine richtige Antwort umfasst mindestens einen der folgenden Aspekte: • die Nicht-Existenz von Zwischenwerten wird erkannt oder • die Achseneinteilung oder -beschriftung wird kritisiert. Mögliche Erläuterungen: Es sieht aus, als gäbe es Zwischenwerte bei den Grundgebühren. ODER Es sieht aus, als gäbe es Zwischenwerte bei den Inklusivminuten. ODER Man weiß nicht, wo ein Tarif anfängt oder aufhört. Anm.: Suggestiert, dass Zwischenwerte existieren. ODER Es sieht aus, als würden die Grundgebühren (jeweils) zwischen zwei Tarifen gleichmäßig/ konstant ansteigen. ODER Es sieht aus, als könnte man ablesen, wie viele Inklusivminuten man bei einer beliebigen Grundgebühr erhielte. ODER Es sieht aus, als könnte man ablesen, welche Grundgebühr man bei einer beliebigen Anzahl Inklusivminuten bezahlen müsste. ODER Die erste Achse ist verkürzt dargestellt. ODER Die 9 fällt auf die Null. ODER (Grenzfall) Es sieht aus, als gäbe es Zwischenwerte. Anm.: Es ist unklar, ob die Grundgebühren oder die Inklusivminuten gemeint sind. ODER (Grenzfall) Die Achsenbeschriftung (Achsenbeschriftungen) fehlt (fehlen). ODER (Grenzfall) Die x-Achse wurde nicht richtig eingeteilt.	Auswertung
RICHTIG		
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: Die Preise steigen nicht, sie sind schon festgelegt. ODER Es müssen Kurven statt Geraden sein. ODER Die Einheiten/ Tarife steigen nicht konstant. Anm.: Problem der Nicht-Existenz von Zwischenwerten wurde nicht erkannt. ODER Weil es keine anderen Kosten zwischen 200 und 1000 gibt. ODER Die Aufteilung der x-Achse ist beliebig. Anm.: Die Aufteilung ist zwar falsch, aber nicht beliebig.	

Merkmale	Leitidee	Daten und Zufall (L5)
	Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mathematisch kommunizieren (K6)
	Anforderungsbereich	III
	Kompetenzstufe	V

Analyse der Aufgabe

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es in allen drei Teilen um die Darstellung von Daten und um deren Angemessenheit geht.

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 9.1 müssen der Grafik zunächst die wesentlichen Informationen zu der Anzahl der Freiminuten und der Höhe der Grundgebühr entnommen werden (K4). Anhand der Angaben lässt sich erkennen, dass sich die Anzahl der Freiminuten von Tarif zu Tarif verdoppelt bzw. sogar verfünffacht und auch die Grundgebühr sich etwa verdoppelt, die Grafik diese Verhältnisse jedoch nicht durch entsprechend wachsende Höhen der Säulen wiedergibt (K4). Dies ist Inhalt der verlangten Erläuterung, die zum Abschluss der Bearbeitung noch zu notieren ist (K6).

Bei Teilaufgabe 9.2 ist zu erkennen, dass die erste Grafik die Anzahl der Freiminuten für die einzelnen Tarife und die zweite Grafik die Höhe der Grundbeträge veranschaulicht (K4). Dies ist dann verständlich darzulegen (K6).

Teilaufgabe 9.3 erfordert es zu erkennen, dass hier der Zusammenhang zwischen der Anzahl an Freiminuten und der Höhe des Grundbetrages bei den vier gegebenen Tarifen dargestellt werden sollte. Es sollte erstens auffallen, dass die vier Datenpunkte miteinander verbunden sind, wodurch der Eindruck entsteht, als würde es auch „Zwischentarife“ geben, und zweitens (weniger wichtig) dass die horizontale Achse nicht äquidistant eingeteilt ist (K4). Diese Erläuterung muss abschließend verständlich dargelegt werden (K6).

Da sowohl Teilaufgabe 9.1 als auch Teilaufgabe 9.3 eine kritische Auseinandersetzung mit der Richtigkeit bzw. der Wirkung der jeweils abgebildeten Grafik erfordern, gehören beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich III an. Teilaufgabe 9.2 hingegen wird aufgrund des erforderlichen Wechsels zwischen zwei Darstellungen dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 9.1:

- Die Schülerinnen und Schüler haben Schwierigkeiten, die gewonnenen Erkenntnisse sprachlich korrekt und verständlich wiederzugeben, wie die folgende Schülerlösung zeigt (Defizit bzgl. K6).

Teilaufgabe 1: Tarifvergleich

Verena meint: „Die Höhe der Säulen in der Anzeige stimmt nicht.“

Erläutere, was sie damit meint.

Die Höhe der Säulen weil alle das selbe Stück höher sind. und das bei 200 und 1000 garnicht geht.

- Die Schülerinnen und Schüler begründen nur sachinhaltlich, warum die Grafik falsch ist, ohne dabei auf mathematische Gesichtspunkte einzugehen, wie die folgende Schülerlösung zeigt.

Teilaufgabe 1: Tarifvergleich

Verena meint: „Die Höhe der Säulen in der Anzeige stimmt nicht.“

Erläutere, was sie damit meint.

Das mit der Größe oft Schwindel betrieben
wird Leute sollen denken groß = viel drin

- Die Schülerinnen und Schüler beziehen sich in ihrer (richtigen) Erläuterung lediglich auf den Zusammenhang zwischen der Anzahl an Freiminuten und der Höhe der Grundgebühr, gehen jedoch nicht auf die Grafik ein (Defizit bzgl. K4).

Teilaufgabe 1: Tarifvergleich

Verena meint: „Die Höhe der Säulen in der Anzeige stimmt nicht.“

Erläutere, was sie damit meint.

Die Anzahl der Einheiten verdoppelt sich zwar bis
200 Einheiten, aber die Preise nicht.

Zu 9.3:

- Die Schülerinnen und Schüler erläutern anhand eines Beispiels nur, was in der Grafik dargestellt wird. Sie begründen dabei jedoch nicht, warum diese Grafik einen falschen Eindruck vermittelt (Defizit bzgl. K1, K6).
- Wie die folgende Schülerlösung zeigt, wird die Grafik aus anderen Gründen als falsch ausgewiesen, z. B. weil sie nicht dem Graphen einer proportionalen Zuordnung entspricht (Defizit bzgl. K4).

Grafik 3 vermittelt einen sachlich nicht ganz richtigen Eindruck.

Erläutere, woran das liegt.

Der Tarifvergleich müsste eigentlich
gerade hoch gehen ohne so ein
Paar ecken.

- Es wird darauf verwiesen, dass ein Säulendiagramm besser geeignet wäre, ohne dies jedoch mathematisch zu begründen.

Treten bei der Bearbeitung der Teilaufgabe 9.1 Schwierigkeiten auf, können die Schülerinnen und Schüler angeregt werden, die in der Grafik enthaltenen Informationen übersichtlich in einer Tabelle nach folgender Art darzustellen:

Anregungen für den Unterricht

Tarif	Anzahl All-in-Einheiten	Grundgebühr	Säulenhöhe
Einsteiger ...			

Das eigene Anfertigen der Tabelle fördert die Auseinandersetzung mit der Grafik, so dass die Schülerinnen und Schüler – auch aufgrund der Übersichtlichkeit der tabellarischen Darstellung – die Veränderung der Anzahl der All-in-Einheiten sowie der Grundgebühr der verschiedenen Tarife und den Fehler in der Grafik leichter erkennen können. Alternativ könnten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden,

Aufgabe 10: Gleichungen lösen ist nicht schwierig

Gleichungen können auf verschiedene Arten gelöst werden.

Teilaufgabe 10.1

Timo soll die Gleichung $7x - 14 = 42$ durch Probieren lösen. Dazu soll er verschiedene Zahlen für x einsetzen und ausprobieren, ob die Gleichung dann stimmt.

Welche Zahl muss eingesetzt werden, damit die Gleichung stimmt?

Kreuze an.

☐

4

☐

8

☐

20

☐

44

☐

56

RICHTIG	2. Kästchen wurde angekreuzt.
---------	-------------------------------

Auswertung

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Merkmale

Teilaufgabe 10.2

Daniel soll die Gleichung $7x - 14 = 38$ rechnerisch lösen. Dazu soll er sie schrittweise nach x umformen.

Notiere Daniels Lösungsweg.

RICHTIG	Die Lösung ist richtig, wenn die Gleichung erkennbar durch Umformen gelöst wurde. Z. B.: $7x - 14 = 38 \quad +14$ $7x = 52 \quad :7$ $x = \frac{52}{7}$ ODER $7x = 52$ $x = \frac{52}{7}$ Anmerkungen: • Akzeptiert wird auch $7\frac{3}{7}$ ODER $\approx 7,4$ ODER jedes andere korrekt gerundete Ergebnis. • Die einzelnen Umformungsschritte müssen mathematisch richtig sein, ihre Reihenfolge ist beliebig. • Wird nach einem Rechenfehler folgerichtig weitergerechnet, wird die Aufgabe als richtig gewertet. • Wird mit der Aufgabe $7x - 14 = 42$ korrekt gerechnet, wird die Aufgabe als richtig gewertet.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Anm.: Wird ein Umformungsfehler gemacht, wird die Aufgabe als „Falsch“ gewertet. ODER Es wird richtig, jedoch nicht zu Ende gerechnet, z. B. $7x = 52$ $x =$

Auswertung

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	II

Merkmale

Teilaufgabe 10.3

In den Teilaufgaben 1 und 2 wurden die gegebenen Gleichungen auf zwei verschiedene Weisen gelöst. Timo hat die Gleichung durch Probieren gelöst, Daniel durch Umformen.

Die Wahl der Vorgehensweise hängt auch von der zu lösenden Gleichung ab.

Gib zwei Gleichungen an, die sich durch Probieren leicht lösen lassen, und gib zwei weitere Gleichungen an, die sich besser durch Umformen lösen lassen.

Probieren

1. Gleichung: _____

2. Gleichung: _____

Umformen

1. Gleichung: _____

2. Gleichung: _____

Erkläre jeweils, warum du die Gleichungen durch Probieren bzw. durch Umformen löst.

Auswertung

RICHTIG	Angabe von je zwei Gleichungen, die sich leicht durch Probieren bzw. besser durch Umformen lösen lassen. UND Darlegung einer nachvollziehbaren Erklärung, warum Probieren bzw. Umformen die besser geeignete Lösungsmethode ist. Dabei muss darauf verwiesen werden, dass das Lösen durch Probieren dann nicht mehr sinnvoll ist, wenn in längeren Gleichungen „schwierige“ Rechnungen erforderlich sind und der Wert für x nicht mit wenigen Probierschritten gefunden werden kann oder wenn die Lösung nicht ganzzahlig ist. Anm.: Die Erläuterungen lassen ggf. erst im Zusammenhang mit den Gleichungen erkennen, dass die Systematik erkannt wurde. Z. B.: <table> <tr> <th>Probieren</th><th>Umformen</th></tr> <tr> <td>1. Gleichung: $25 = 2x + 5$</td><td>1. Gleichung: $11x + 8,5 = 24x - 3,2$</td></tr> <tr> <td>2. Gleichung: $a + a = 4$</td><td>2. Gleichung: $3x + 4 - x = 21 + 4x$</td></tr> </table> Die linken beiden Gleichungen können aufgrund der einfachen Zahlen, die es möglich machen im Kopf zu rechnen, leicht durch Probieren gelöst werden. Hinzu kommt, dass nur auf einer Seite des Gleichheitszeichens Variablen stehen. Die rechten beiden Gleichungen sind länger und weisen größere Zahlen bzw. Kommazahlen auf. Auch Brüche wären denkbar. Außerdem sind auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Glieder mit Variablen zu finden. ODER <table> <tr> <th>Probieren</th><th>Umformen</th></tr> <tr> <td>1. Gleichung: $20 = 4x$</td><td>1. Gleichung: $6b + 18 = 2\frac{1}{2}b - 3$</td></tr> <tr> <td>2. Gleichung: $4a = 4$</td><td>2. Gleichung: $3x + 4 - x = 10\frac{1}{2}$</td></tr> </table> Die Gleichungen auf der rechten Seite sind nicht so einfach durch Probieren zu lösen wie die beiden anderen Gleichungen, da sie Brüche enthalten. ODER (Grenzfall) <table> <tr> <th>Probieren</th><th>Umformen</th></tr> <tr> <td>1. Gleichung: $x + x = 20$</td><td>1. Gleichung: $7x - 15 = 23$</td></tr> <tr> <td>2. Gleichung: $x + x = 26$</td><td>2. Gleichung: $7x - 16 = 23$</td></tr> </table> Anm.: In beiden Fällen werden je zwei strukturell gleiche Beispiele angegeben, die sich nur minimal unterscheiden, dennoch aber den Vorgaben genügen.	Probieren	Umformen	1. Gleichung: $25 = 2x + 5$	1. Gleichung: $11x + 8,5 = 24x - 3,2$	2. Gleichung: $a + a = 4$	2. Gleichung: $3x + 4 - x = 21 + 4x$	Probieren	Umformen	1. Gleichung: $20 = 4x$	1. Gleichung: $6b + 18 = 2\frac{1}{2}b - 3$	2. Gleichung: $4a = 4$	2. Gleichung: $3x + 4 - x = 10\frac{1}{2}$	Probieren	Umformen	1. Gleichung: $x + x = 20$	1. Gleichung: $7x - 15 = 23$	2. Gleichung: $x + x = 26$	2. Gleichung: $7x - 16 = 23$
Probieren	Umformen																		
1. Gleichung: $25 = 2x + 5$	1. Gleichung: $11x + 8,5 = 24x - 3,2$																		
2. Gleichung: $a + a = 4$	2. Gleichung: $3x + 4 - x = 21 + 4x$																		
Probieren	Umformen																		
1. Gleichung: $20 = 4x$	1. Gleichung: $6b + 18 = 2\frac{1}{2}b - 3$																		
2. Gleichung: $4a = 4$	2. Gleichung: $3x + 4 - x = 10\frac{1}{2}$																		
Probieren	Umformen																		
1. Gleichung: $x + x = 20$	1. Gleichung: $7x - 15 = 23$																		
2. Gleichung: $x + x = 26$	2. Gleichung: $7x - 16 = 23$																		

	ODER „Beim Probieren sieht man es gleich, was rauskommt. Beim Umformen muss man schon rechnen.“, sofern passende illustrierende Beispiele angegeben sind.
FALSCH	Alle anderen Antworten, insbesondere Antworten mit fehlender, fehlerhafter oder falscher Begründung. Z. B.: Nur einfache Gleichungen können durch Probieren gelöst werden, komplizierte Gleichungen nicht. Anm.: In dieser Erklärung wird zwar auf die Komplexität der Gleichungen verwiesen, jedoch nicht genauer erläutert, worauf diese beruht. ODER Wenn man sich sicher sein möchte, dass die Gleichung richtig gelöst ist, sollte man sie immer durch Umformen lösen. Anm.: Es wird kein Bezug zu den strukturellen Gegebenheiten der Gleichungen hergestellt. ODER Wenn man gut im Kopf rechnen kann, kann man alle Gleichungen leicht durch Probieren lösen. Anm.: Es wird kein Bezug zu den strukturellen Gegebenheiten der Gleichungen hergestellt.

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	IV

Merkmale

Analyse der Aufgabe

Didaktischer Kommentar

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe sind lineare Gleichungen zu lösen und die Lösungsmethoden zu reflektieren. Die drei Teilaufgaben gehören daher zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4).

Obwohl die Gleichung in Teilaufgabe 10.1 natürlich auch kalkülmäßig gelöst werden kann, zielt ihre Formulierung bewusst auf ein Lösen durch systematisches Probieren ab. Dieses Verfahren steht beim technischen Arbeiten i. A. gleichberechtigt neben dem kalkülmäßigen Lösen einer Gleichung. In der vorliegenden Aufgabe liegt es nahe, einfach die gegebenen Antwortalternativen einzusetzen. Ob die Schülerinnen und Schüler die gegebene Gleichung hier tatsächlich durch Probieren oder aber durch Umformen lösen, bleibt offen. In jedem Fall ist technische Kompetenz (K5) gefragt.

In Teilaufgabe 10.2 (die keine ganzzahlige Lösung hat) ist das kalkülmäßige Lösen der Gleichung gefordert. Hierzu sind im Rahmen des technischen Arbeitens (K5) einfache Äquivalenzumformungen durchzuführen.

Dieses Nebeneinanderstellen beider Lösungsverfahren, deren jeweilige Wahl wesentlich von der gegebenen Gleichung abhängt, bereitet die Bearbeitung von Teilaufgabe 10.3 vor. Deren Aufgabentext stellt einen Rückbezug zu den beiden vorherigen Teilaufgaben her und stellt die Unterschiedlichkeit der beiden Lösungsverfahren heraus (K6). Die Schülerinnen und Schüler werden dabei auf die hier geforderte Reflexion vorbereitet, indem darauf hingewiesen wird, dass die Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens von der Art der zu lösenden Gleichung abhängt. Sie müssen hier auf einer Metaebene das reflektieren, was sie zuvor beim Lösen getan haben (K5). Zusätzlich müssen sie selbst Gleichungen angeben, die sich für das jeweilige Verfahren besonders eignen (K5). Die Überlegungen und Reflexionen sind zu erläutern (K6).

Das Bearbeiten der ersten beiden Teilaufgaben verlangt ausschließlich Routinetätigkeiten, die an vertrauten Beispielen umgesetzt werden, so dass beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden können. Teilaufgabe 10.3 erfordert eine Reflexion des Vorgehens auf einer Metaebene, da hier Lösungsverfahren hinsichtlich ihrer Effizienz zu bewerten sind. Dies rechtfertigt eine Einordnung in den Anforderungsbereich III.

Zu 10.1:

- 1. Antwortalternative wurde angekreuzt: Beim Einsetzen wird 14 addiert, statt zu subtrahieren (Defizit bzgl. K5).
- 3. Antwortalternative wurde angekreuzt: Beim kalkülmäßigen Lösen werden nur Teile der Gleichung durch 7 dividiert, und als Zwischenschritt ergibt sich $x - 14 = 6$. Diese Gleichung wird dann folgerichtig weiter gelöst (Defizit bzgl. K5).
- 4. Antwortalternative wurde angekreuzt: Beim kalkülmäßigen Lösen wird bei der Division durch 7 nur die linke Seite der Gleichung beachtet. Die erhaltene Gleichung $x - 2 = 42$ wird dann folgerichtig gelöst (Defizit bzgl. K5).
- 5. Antwortalternative wurde angekreuzt: Beim Einsetzen wird der Faktor 7 nicht beachtet ($56 - 14 = 42$; Defizit bzgl. K5).

Zu 10.2:

- Unter Missachtung von Umformungsregeln wird beispielsweise nicht durch 7 dividiert, sondern es wird „nur“ auf der linken Seite 7 subtrahiert (Fehlösung: $x = 45$) (Defizit bzgl. K5).
- Um „-14 wegzukriegen“, wird fälschlich 14 subtrahiert statt addiert. Bei folgerichtigem Weiterrechnen ergibt sich als Fehlösung $\frac{24}{7}$ oder $\approx 3,4$ (Defizit bzgl. K5).

Zu 10.3:

- Zu beiden Verfahren werden passende Gleichungen angegeben, jedoch die Formulierung der Erklärung bereitet Schwierigkeiten. Dies zeigt der folgende Auszug aus einer Schülerlösung (Defizit bzgl. K6).

Erkläre jeweils, warum du die Gleichungen durch Probieren bzw. durch Umformen löst.

Bei wenn ich probieren will, dann nehme ich Zahlen die sich durch das x teilen lassen.

Mit Aufgaben dieser Art kann aufgezeigt werden, dass das Lösen durch Probieren sowie das kalkülmäßige Lösen gleichberechtigte Lösungsverfahren sind. Zudem lässt sich ein Blick für Zahlen durch gezieltes Unterbinden des Einsatzes des Taschenrechners in ausgewiesenen Phasen des Unterrichts verbessern. Auch beim späteren Umgang mit komplexeren Gleichungen - z. B. mit quadratischen Gleichungen im neunten Schuljahr - sollten beide Lösungsverfahren weiterhin eine Rolle spielen. Gleiches gilt für den Umgang mit linearen Gleichungssystemen, deren Lösung leichter gedeutet werden kann, wenn zunächst die Art der vorliegenden Gleichungen betrachtet wird, bevor Lösungsverfahren angewendet werden.

Auch überschlägige Lösungen von Gleichungen sind ein sinnvolles Verfahren, um zu überlegen, in welchem Zahlenraum eine Lösung liegen kann.

Aufgabe 11: Linear und proportional

Eine proportionale Funktion kann im Koordinatensystem durch eine Gerade dargestellt werden, die durch den Punkt (0|0) verläuft.

Jede lineare Funktion kann durch eine Funktionsgleichung der Form $y = mx + b$ beschrieben werden.

Teilaufgabe 11.1

Nachfolgend werden drei Sachsituationen beschrieben.

Entscheide jeweils, ob sich die Sachsituation durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

Kreuze jeweils an.

	ja	nein
Ein Stromanbieter verlangt eine monatliche Grundgebühr. Für jede verbrauchte Kilowattstunde Strom ist zusätzlich eine festgelegte Gebühr zu zahlen.	☐	☐
Das Schwimmbecken eines Freibades ist zu Saisonbeginn leer. Vor der Eröffnung der Freibadsaison wird das Schwimmbecken mit Wasser befüllt. Dabei ist die pro Stunde einlaufende Wassermenge gleich.	☐	☐
Ein Sparbetrag wird für drei Jahre mit einem festen Zinssatz angelegt. Nach dem ersten Jahr werden auch die Zinsen verzinst.	☐	☐

RICHTIG			ja	nein
		Ein Stromanbieter verlangt eine monatliche Grundgebühr. Für jede verbrauchte Kilowattstunde Strom ist zusätzlich eine festgelegte Gebühr zu zahlen.	☒	☐
		Das Schwimmbecken eines Freibades ist zu Saisonbeginn leer. Vor der Eröffnung der Freibadsaison wird das Schwimmbecken mit Wasser befüllt. Dabei ist die pro Stunde einlaufende Wassermenge gleich.	☒	☐
		Ein Sparbetrag wird für drei Jahre mit einem festen Zinssatz angelegt. Nach dem ersten Jahr werden auch die Zinsen verzinst.	☐	☒

Auswertung

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	IV

Merkmale

Teilaufgabe 11.2

Beurteile die folgenden Aussagen zu Funktionen.

Kreuze jeweils an.

	richtig	falsch
Für jedes Wertepaar x und y einer proportionalen Funktion hat der Quotient $\frac{y}{x}$ den gleichen Wert. (Dabei ist $x, y \neq 0$.)	☐	☐
Jede proportionale Funktion ist auch eine lineare Funktion.	☐	☐
Jede lineare Funktion ist auch eine proportionale Funktion.	☐	☐
Bei einer proportionalen Funktion gehört zum Doppelten des x -Werts die Hälfte des y -Werts.	☐	☐
Bei einer linearen Funktion hat die zugehörige Gerade immer eine positive Steigung.	☐	☐

RICHTIG	Wenn bereits 4 von 5 Kreuzen richtig gesetzt wurden.		
		richtig	falsch
	Für jedes Wertepaar x und y einer proportionalen Funktion hat der Quotient $\frac{y}{x}$ den gleichen Wert. (Dabei ist $x, y \neq 0$.)	☒	☐
	Jede proportionale Funktion ist auch eine lineare Funktion.	☒	☐
	Jede lineare Funktion ist auch eine proportionale Funktion.	☐	☒
	Bei einer proportionalen Funktion gehört zum Doppelten des x -Werts die Hälfte des y -Werts.	☐	☒
	Bei einer linearen Funktion hat die zugehörige Gerade immer eine positive Steigung.	☐	☒

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	V

Didaktischer Kommentar

Beide Teilaufgaben gehören zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da in der ersten Teilaufgabe funktionale Beziehungen in Realsituationen betrachtet und in der zweiten Teilaufgabe Eigenschaften von (linearen) Funktionen untersucht werden.

Zunächst müssen die im Einleitungstext gegebenen Informationen zu proportionalen und linearen Funktionen gelesen und erfasst werden. Dabei muss erkannt werden, dass proportionale Funktionen ein Spezialfall linearer Funktionen sind (K6). Vor dem Hintergrund dieser Informationen wird dann in Teilaufgabe 11.1 bei jeder der drei beschriebenen Sachsituationen geprüft, ob sie sich durch eine lineare Funktion modellieren lässt (K3). Im Beispiel „Stromanbieter“ sind dabei die Bedeutung der Grundgebühr und der zusätzlich zu zahlenden Gebühr für jede verbrauchte Kilowattstunde zu erfassen. Im Beispiel „Schwimmbecken“ ist zu erkennen, dass es sich auch bei diesem Spezialfall einer proportionalen Funktion um eine lineare Funktion handelt. Im dritten Beispiel ist zu erkennen, dass sich die beschriebene Sachsituation nicht mehr durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

Teilaufgabe 11.2 ist anders als die erste Teilaufgabe eine innermathematische Aufgabe, in der die zum jeweiligen Funktionstyp gemachten Aussagen zunächst zu erkennen und zu verstehen sind (K6). Dies erfordert neben der Verwendung von Symbolen (K5) die Deutung fachsprachlicher Begriffe wie „Wertepaar“ oder „Quotient“. Darüber hinaus sind Allaussagen zu identifizieren, die nicht in allen Fällen explizit genannt sind. In vier Antwortalternativen heißt es „jede“, „jedes“ bzw. „immer“, während in der vorletzten Antwortalternative „Bei einer proportionalen Funktion“ als „Bei jeder proportionalen Funktion“ zu lesen ist (vgl. hierzu auch Modul D zur Kompetenz Kommunizieren). Nach dem Lesen ist für jede Aussage durch mentales Argumentieren zu entscheiden, ob sie allgemein zutrifft oder nicht (K1). Bei dieser Überprüfung können verschiedene Argumentationsstrategien angewendet werden. Beispielsweise können die Schüler prüfen, ob sich ein Gegenbeispiel finden lässt, mit dem sich die Gültigkeit einer Aussage widerlegen lässt (Eine ausführliche Darstellung weiterer Argumentationsstrategien findet sich im Modul D zur Kompetenz Argumentieren in den Didaktischen Kommentaren zu VerA 2010). Besonders die zweite und die dritte Antwortalternative machen deutlich, dass beim Lesen und schließlich beim Prüfen der Behauptungen die Richtung der Argumentation beachtet werden muss. Zur Überprüfung der vorliegenden Aussagen muss jeweils eine pas-

sende Problemlösestrategie gefunden werden (K2). So kann jedesmal eine Skizze angefertigt werden, um die gegebene Aussage zu veranschaulichen.

Die erste Teilaufgabe kann dem Anforderungsbereich II zugeordnet werden, da mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten anzuwenden und zu verbinden sind. Die begrifflichen Anforderungen an das Kommunizieren und das Argumentieren auf allgemeiner Ebene rechtfertigen ein Einordnen von Teilaufgabe 11.2 in den Anforderungsbereich III. Die Schüler müssen hier Fragen stellen wie „Ist das immer so?“, um die Tragweite der Aussagen beurteilen und ihre Allgemeingültigkeit reflektieren zu können.

Zu 11.1:

Mögliche Schwierigkeiten

- 1. Zeile: nein wurde angekreuzt: Die Deutung der Grundgebühr und der Gebühren für die verbrauchten Kilowattstunden im durch eine Funktionsgleichung gegebenen linearen Modell gelingt nicht (Defizit bzgl. K3).
- 2. Zeile: nein wurde angekreuzt: Die vorliegende proportionale Funktion wird nicht als Spezialfall einer linearen Funktion erkannt (Defizit bzgl. K3).
- 3. Zeile: ja wurde angekreuzt: Es wird nicht erkannt, dass eine Zinseszinssituation vorliegt. Möglicherweise wird der zweite Satz überlesen (Defizit bzgl. K3, K6).

Zu 11.2:

- 1. Zeile: falsch wurde angekreuzt: Die Quotientengleichheit als (sogar charakteristische) Eigenschaft einer proportionalen Funktion wird nicht erkannt (Defizit bzgl. K1).
- 2. Zeile: falsch wurde angekreuzt: Die Richtung der Argumentation wird missachtet. Es wird nicht erkannt, dass eine proportionale Funktion ein Sonderfall einer linearen Funktion ist (Defizit bzgl. K1).
- 3. Zeile: richtig wurde angekreuzt: Die Bedeutung des Allquantors „Jede“ wird vernachlässigt. Möglicherweise wird die vorliegende Aussage mit der vorangehenden verwechselt (Defizit bzgl. K6, K1).
- 4. Zeile: richtig wurde angekreuzt: Bei dieser Fehllösung wird eine proportionale Funktion mit einer antiproportionalen verwechselt (Defizit bzgl. K6, K1).
- 5. Zeile: richtig wurde angekreuzt: Die Vorstellung vom Verlauf einer Geraden als Graph einer linearen Funktion ist verengt, da nur positive Steigungen als zulässige Werte angenommen werden (Defizit bzgl. K5).

Schülerinnen und Schüler können im Unterricht funktionale Zusammenhänge auf vielfältige Weisen erfahren. Gute Zugangsmöglichkeiten ergeben sich durch einen Umgang mit unterschiedlichen Kontexten und einen häufigen Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen, zu denen – je nach Formalisierungsgrad – auch Gleichungen gehören.

Anregungen für den Unterricht

Selbst durchgeführte Versuche, in denen funktionale Abhängigkeiten zunächst z. B. tabellarisch dokumentiert werden, können in einem ersten Schritt anschließend versprachlicht werden. Auf beidem aufbauend kann eine Übersetzung in eine graphische Darstellung erfolgen, anhand derer nochmals die verbale Beschreibung formuliert wird. Als weitere Darstellungsform funktionaler Zusammenhänge stehen neben Tabelle, Graph und Situationsbeschreibung auch – je nach erfolgter Formalisierung – Gleichungen zur Verfügung. Das wechselseitige Übersetzen zwischen allen die-

sen Darstellungen fördert die Flexibilität im Umgang mit solchen Zusammenhängen und kann auch verschiedenen Lernertypen gerecht werden.

So können in Teilaufgabe 11.1 die beschriebenen Sachsituationen graphisch dargestellt werden – es genügt eine Skizze –, um dann begründet zu entscheiden, ob sich die jeweilige Sachsituation durch eine lineare Funktion modellieren lässt. Beim Beispiel „Schwimmbad“ könnte man auch einen Füllversuch im Klassenraum durchführen, bei dem analog zur Sachsituation ein Gefäß gleichmäßig befüllt wird. Hierbei lässt sich thematisieren, unter jeweils welchen Voraussetzungen eine lineare oder eine proportionale Funktion passen würde.

In einer Erweiterung und Vertiefung kann vor allem beim Beispiel „Schwimmbad“ der Kovariationsaspekt berücksichtigt werden, indem überlegt wird, wie sich eine Veränderung der Ausgangsgröße (hier: die pro Stunde einlaufende Wassermenge) auf die zugeordnete Größe (hier: der Füllstand des Schwimmbades oder die Wassermenge im Schwimmbad) auswirkt. Ergänzend können weitere Sachsituationen überlegt werden, und es kann jeweils geprüft werden, ob diese sich ebenfalls durch eine lineare (oder durch eine proportionale) Funktion beschreiben lassen.

Bereitet das eigenständige Verbalisieren funktionaler Zusammenhänge noch größere Probleme, so können gegebene graphische und verbale Darstellungen einander zugeordnet werden. Erst auf der Grundlage eines besseren Verständnisses würden weitere Formalisierungen durchgeführt. Ebenfalls erst zu einem späteren Zeitpunkt würden die relevanten mathematischen Begriffe wie „Linearität“ und „Proportionalität“ und die zugehörigen Eigenschaften dieser Funktionstypen nochmals problematisiert. Dabei bietet sich zur Vertiefung des Verständnisses und zur Abgrenzung beider Funktionstypen deren bewusstes Kontrastieren an.

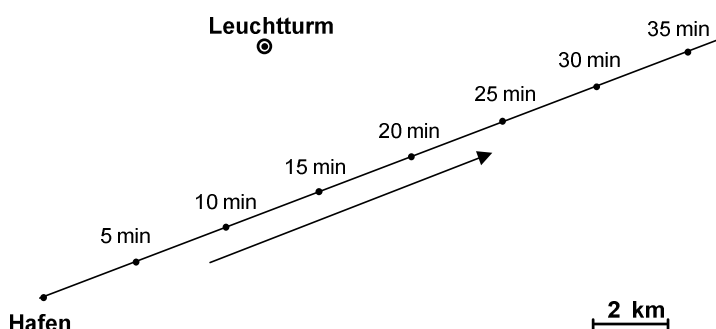
Bereitet die Analyse funktionaler Zusammenhänge in Sachkontexten Probleme, so können verschiedene Realkontexte gesammelt werden, in denen zwei Größen funktional zusammenhängen. Um einer verengten Vorstellung vorzubeugen, bietet sich insbesondere die Hinzunahme nicht-linearer Zusammenhänge an. Dies können Füll- oder Abbrenngraphen sein oder auch Wachstumskontexte (Bevölkerung, Zinsen, Wasserstandsveränderungen). Zwar können Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe nicht-lineare Prozesse noch nicht formal fassen, doch können sie deren Verläufe in Worten oder mittels Graphen qualitativ beschreiben. So können schon zu einem frühen Zeitpunkt variable Vorstellungen von funktionalen Zusammenhängen entwickelt werden, um der häufigen Fehlvorstellung vorzubeugen, dass eine Funktion immer durch eine Gerade repräsentiert sein muss.

Bei innermathematischen funktionalen Zusammenhängen kann im Unterricht immer wieder auf deren charakteristische Eigenschaften eingegangen werden. Dabei sollte auch bei linearen Funktionen der typischen Fehlvorstellung, dass eine Gerade immer eine positive Steigung hat, aktiv entgegengetreten werden. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, Graphen linearer Funktionen zu skizzieren, die bestimmten Eigenschaften genügen, z.B. „Skizziere eine Gerade, die eine negative Steigung hat und die y-Achse oberhalb der x-Achse schneidet.“ Man könnte die Schülerinnen und Schüler auch auffordern zu beschreiben, wie gegebene Geraden verändert werden müssten, um Graph einer proportionalen Funktion zu sein.

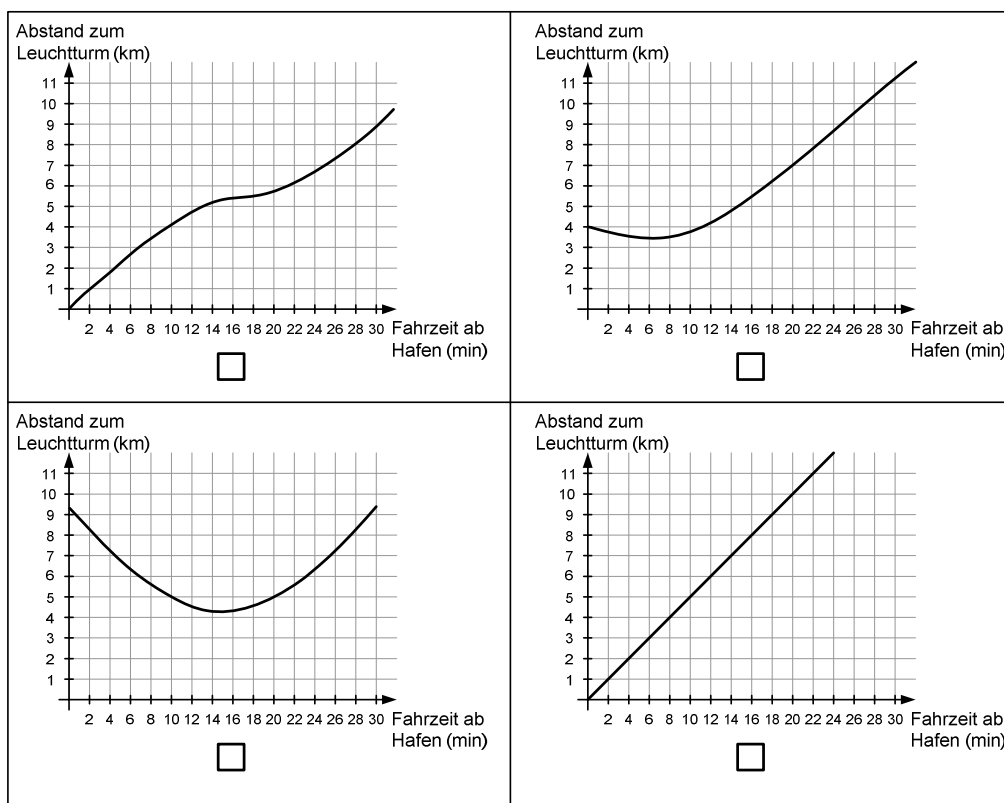
Weitere Anregungen zum Umgang mit Schwierigkeiten können dem Modul D zur Kompetenz Kommunizieren entnommen werden (vgl. dort Abschnitt 4.1).

Aufgabe 12: Abstand auf dem Wasser

Ein Schiff fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit aus einem Hafen an einem Leuchtturm vorbei. Der nachstehenden Abbildung kann man entnehmen, wie viele Minuten es vom Ablegen bis zu den markierten Positionen braucht.



Welcher Graph stellt den Abstand des Schiffes zum Leuchtturm als Funktion der Zeit dar?
Kreuze an.



RICHTIG	1. Kästchen in der zweiten Zeile wurde angekreuzt
---------	---

Auswertung

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch modellieren (K3) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	IV

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da es um die zeitliche Abhängigkeit des Abstandes eines Schiffes zu einem Leuchtturm geht.

Analyse der Aufgabe

Zur Bearbeitung der Aufgabe muss zunächst die gegebene Problemsituation verstanden werden. Insbesondere muss mithilfe der gegebenen Darstellung erfasst werden, dass sich das Schiff gleichmäßig fortbewegt und sich der Abstand vom Leuchtturm mit zunehmender Fahrzeit zunächst verkleinert und dann wieder vergrößert. Dabei kann speziell auch der Zeitpunkt ermittelt werden, zu dem das Schiff den kleinsten Abstand zum Leuchtturm hat (K4). Vor dem Hintergrund dieser Informationen gibt es nun zwei naheliegende Vorgehensweisen (K2): ein passendes Modell – veranschaulicht durch eine Grafik – aus den gegebenen Modellen auswählen, oder selber ein solches erzeugen und mit den gegebenen vergleichen (K3, K4). Hierbei muss zwischen zwei verschiedenen Darstellungsarten gewechselt und überprüft werden, inwiefern die zur Auswahl gestellten Graphen die Charakteristika des vorliegenden funktionalen Zusammenhangs richtig darstellen (K4).

Das mehrschrittige Vorgehen und insbesondere der zu vollziehende Wechsel zwischen zwei verschiedenen Darstellungsformen rechtfertigt die Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich II.

Mögliche Schwierigkeiten

- 1. Antwortalternative wurde angekreuzt: Es ist zu vermuten, dass der Bezug zum Leuchtturm nicht erkannt bzw. allgemeiner die Aufgabenstellung nicht verstanden wurde (Defizit bzgl. K3 bzw. K6).
- 2. Antwortalternative wurde angekreuzt: Zwar wird erkannt, dass es einen kleinsten Abstand gibt, dieser wird jedoch zeitlich falsch verortet; auch die zu kleine Minimalentfernung findet keine Beachtung (Defizit bzgl. K4).
- 4. Antwortalternative wurde angekreuzt: Dies deutet entweder darauf hin, dass die Entfernung des Schiffes zum Hafen in Abhängigkeit der Fahrzeit betrachtet wurde, oder dass der Graph und der in der Abbildung gegebene Weg gleichgesetzt wurden (Defizit bzgl. K3, K4).

Anregungen für den Unterricht

Treten bei der Bearbeitung derartiger Aufgaben Schwierigkeiten auf, können die Schülerinnen und Schüler zunächst aufgefordert werden, den Abstand des Schiffes vom Leuchtturm zu verschiedenen Zeitpunkten zu messen und anschließend den Graphen zu ihren Daten zu zeichnen. Hierauf aufbauend ist es denkbar, weitere Bewegungsvorgänge wie z. B. den Verlauf eines 1000-m-Laufs oder die Fahrt entlang einer Rennstrecke zu betrachten. Dabei können die Schülerinnen und Schüler Wertetabellen, Graphen und Situationsbeschreibungen einander wechselseitig zuordnen, begründet auswählen oder eine dieser Darstellungsformen anfertigen.

In Abhängigkeit von den gewählten Beispielen können die Zusammenhänge der drei Darstellungsformen gut herausgearbeitet und verschiedene Typen von Bewegungsvorgängen voneinander abgegrenzt werden. Dabei bieten sich auch Fragen an wie „Wie verändert sich der Verlauf des Graphen, wenn das Schiff seine Geschwindigkeit nach einer Fahrzeit von 20 Minuten verdoppelt?“, um die Abhängigkeit der verschiedenen Größen bewusst zu machen.

Weitere Anregungen zum Umgang mit Schwierigkeiten bei der Bearbeitung dieser Aufgabe können dem Modul D zur Kompetenz Kommunizieren entnommen werden (vgl. dort Abschnitt 4.3).

Geeignete Aufgaben, um den Zusammenhang der verschiedenen Darstellungsformen herauszuarbeiten und den Wechsel zwischen diesen zu trainieren, können z. B. Lergenmüller/Schmidt (2007) entnommen werden.

Aufgabe 13: Schnittpunkt von Graphen

Zwei lineare Funktionen g und f haben die Funktionsgleichungen $g(x)=2x-1$ und $f(x)=-x+2$.

Gib die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen beider Funktionen an.

Die beiden Graphen schneiden sich im Punkt $S(_\mid_\)$.

RICHTIG	Die beiden Graphen schneiden sich im Punkt $S(1 \mid 1)$. Anmerkung: Der inhaltliche Kern dieses Items ist die Idee des Gleichsetzens. Ob dies rechnerisch oder zeichnerisch geschieht, ist unerheblich. Dies begründet die Auswahl der Grenzfälle. Mögliche Lösungen: Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $x = 1$ und $y = 1$. ODER (Grenzfall) Beide Graphen werden richtig in ein Koordinatensystem gezeichnet und der Schnittpunkt ist erkennbar. Die Koordinaten des Schnittpunkts werden z. B. durch gestrichelte Linien zu den Achsen angedeutet, aber nicht explizit angegeben.
	ODER (Grenzfall) Die Koordinaten des Schnittpunkts werden errechnet, aber nicht explizit nach Abschluss der Rechnung angegeben. ODER (Grenzfall) Die Geraden werden richtig in ein Koordinatensystem eingezeichnet, die Koordinaten des Schnittpunkts jedoch falsch abgelesen. ODER (Grenzfall) Eine der beiden Geraden wird falsch in ein Koordinatensystem eingezeichnet und die Koordinaten des Schnittpunkts werden folgerichtig angegeben. ODER (Grenzfall) Bei der rechnerischen Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunkts unterläuft ein Fehler, die Koordinaten des Schnittpunkts werden folgerichtig angegeben.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: Beide Geraden werden falsch in ein Koordinatensystem eingezeichnet und die Koordinaten des Schnittpunkts werden folgerichtig abgelesen.

Auswertung

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	V

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), denn es geht um lineare Funktionen in symbolischer und graphischer Darstellungsform.

Analyse der Aufgabe

Der gesuchte Schnittpunkt kann auf zeichnerischem oder auf rechnerischem Weg ermittelt werden. Bei einer zeichnerischen Herangehensweise werden die beiden Geraden (etwa mittels Steigung und y-Achsenabschnitt) in einem Koordinatensystem dargestellt und der Schnittpunkt direkt abgelesen (K4). Bei einer rechnerischen Herangehensweise kann der Schnittpunkt beispielsweise durch Anwendung des Gleichsetzungsverfahrens bestimmt werden (K5). Da es sich beide Male um die Reproduktion eines bekannten Verfahrens handelt, gehört diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I an.

- Beim Zeichnen der beiden zugehörigen Geraden werden Steigung und y-Achsenabschnitt verwechselt (Defizit bzgl. K5).
- Beim Ablesen des Schnittpunkts werden die x- und y-Koordinate vertauscht (Defizit bzgl. K5).
- Es wird nicht erkannt, dass die Steigung der Geraden zur Funktionsgleichung $f(x) = -x + 2$ negativ ist bzw. der Transfer von symbolischer in graphische Dar-

Mögliche Schwierigkeiten

stellungsform gelingt nicht, wie die folgende Schülerlösung zeigt (Defizit bzgl. K5 und ggf. bzgl. K4).

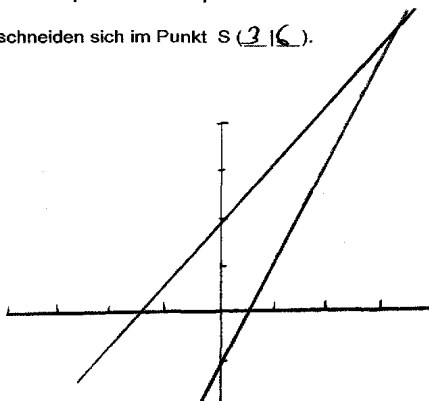
Schnittpunkt von Graphen

Teilaufgabe 1: Schnittpunkt von Graphen

Zwei lineare Funktionen g und f haben die Funktionsgleichungen $g(x)=2x-1$ und $f(x)=-x+2$.

Gib die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen beider Funktionen an.

Die beiden Graphen schneiden sich im Punkt $S(3|6)$.



Treten bei der Bearbeitung dieser Aufgabe Schwierigkeiten auf, können die erforderlichen Routineverfahren etwa in Form von Partnerübungen geübt werden. Dabei legt Schüler A zwei auf Folie gezeichnete Geraden so in ein Koordinatensystem, dass sie sich schneiden. Schüler B muss nun den Schnittpunkt ablesen. Anschließend wechseln beide ihre Rollen.

Soll der Schnittpunkt rechnerisch bestimmt werden, sind zunächst die beiden Funktionsgleichungen aufzustellen, so dass dies integriert wiederholt werden kann. Soll dieser Aspekt ausgeweitet werden, kann alternativ Schüler B die Funktionsgleichungen vorgeben und Schüler A muss die hierzu passenden Geraden in das Koordinatensystem legen.

Im Sinne eines operativen Durcharbeitens können hierauf aufbauend Fragen wie „Wie muss die Steigung der Geraden zur Funktion g verändert werden, damit diese die Gerade zur Funktion f nicht schneidet?“ oder Arbeitsaufträge wie „Verändere die y -Abschnitte beider Geraden so, dass ihr Schnittpunkt auf der y -Achse liegt.“ thematisiert werden. Auf dieser Grundlage kann die Bedeutung der Steigung und des y -Achsenabschnitts für den Verlauf der jeweiligen Geraden auf allgemeiner Ebene betrachtet werden. Dies kann auch beispielsweise durch folgende weiterführende Aufgabe geschehen.

Weiterführende Aufgabe

Gegeben sind zwei lineare Funktionen g und f mit $g(x)=ax+b$ und $f(x)=mx+n$. Die zugehörigen Graphen sind Geraden.

Der Schnittpunkt beider Geraden soll auf der y -Achse liegen.

Beschreibe, welche Bedingungen die Steigungen a und m bzw. die y -Achsenabschnitte b und n dann erfüllen müssen.

Bedingungen für a und m :



Bedingungen für b und n :

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe entnehmen die Schülerinnen und Schüler dem Text zunächst die gegebene Bedingung an die Geraden. Anschließend untersuchen sie, wie diese Bedingung mit den Steigungen und den y-Achsenabschnitten der bei-

den Geraden zusammenhängt. Hierzu können die Schülerinnen und Schüler auf die anhand der konkreten Beispiele gesammelten Erfahrungen zurückgreifen. Die Bedingungen an die Parameter ($b = n$ und ggfs. zusätzlich $a \neq m$, wenn „der Schnittpunkt“ eindeutig sein soll) müssen dann in allgemeiner Form angegeben werden.

Aufgabe 14: Judomatte

Bei den Olympischen Spielen wird der Judokampf innerhalb einer $8\text{ m} \times 8\text{ m}$ großen quadratischen Kampfzone ausgetragen.

Wie groß ist diese?

Kreuze an.

☐

8 m^2

☐

16 m^2

☐

32 m^2

☐

64 m^2

☐

256 m^2

RICHTIG	4. Kästchen wurde angekreuzt
---------	------------------------------

Auswertung

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da ein Flächeninhalt zu ermitteln ist. Die hierzu benötigten Maße können dem Aufgabentext direkt entnommen und zur Berechnung genutzt werden (K5).

Da sich die Anforderungen der Aufgabe auf Routinerechnungen beschränken, gehört diese Aufgabe zum Anforderungsbereich I.

Analyse der Aufgabe

- 1. Antwortalternative wurde angekreuzt: Vermutlich wird die Schreibweise „ 8 m^2 “ mit der Schreibweise „ $8\text{ m} \times 8\text{ m}$ “ im Text und somit auch mit dem zu ermittelnden Flächeninhalt gleichgesetzt.
- 2. Antwortalternative wurde angekreuzt: Es ist naheliegend, dass die im Text enthaltenen Zahlen einfach addiert werden, ohne passende Grundvorstellungen zu aktivieren.
- 3. Antwortalternative wurde angekreuzt: Vermutlich wird statt des Flächeninhalts der Umfang des Quadrats (32 m) berechnet.
- 5. Antwortalternative wurde angekreuzt: Es könnte eine Fehlvorstellung über das gegebene Quadrat vorliegen (Seitenlänge $8\text{ m} + 8\text{ m}$).

Mögliche Schwierigkeiten

Aufgabe 15: Holzstab

Teilaufgabe 15.1

Ein 3m langer Holzstab wird in zwei gleich lange Teile zersägt.

Gib an, wie lang jedes Teil ist.

_____ m

Auswertung

RICHTIG	1,5 Anm.: Akzeptiert werden auch wertgleiche Angaben, z. B. $\frac{3}{2}$ oder $\frac{6}{4}$.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: 150

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Teilaufgabe 15.2

Von einem 2m langen Pfahl steckt ein Viertel im Boden.

Gib an, wie viel Meter des Pfahls **nicht** im Boden stecken.

_____ m

Auswertung

RICHTIG	1,5 Anm.: Akzeptiert werden auch wertgleiche Angaben, z. B. $\frac{3}{2}$ oder $\frac{6}{4}$.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: 150

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	II

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da Längen zu berechnen sind. Zur Bearbeitung beider Teilaufgaben sind einfache Grundrechenoperationen durchzuführen (K5). Teilaufgabe 15.2 erfordert zusätzlich den Rückgriff auf die Anteilsvorstellung, d. h. „ein Viertel“ muss als vierter Teil von 2 m gedeutet werden.

Da es sich bei der Bearbeitung der Aufgabe um Routinerechnungen handelt, gehören beide Teilaufgaben zum Anforderungsbereich I.

Analyse der Aufgabe

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 15.2:

- Es wird nur ein Viertel von 2 m berechnet, d. h. das „nicht“ wird übersehen (Defizit bzgl. K6).

Aufgabe 16: Fußleisten

Ein Zimmer, das 4m lang und 5m breit ist, soll renoviert werden. Die Renovierung ist fast beendet und nur die Fußleisten fehlen noch.

Teilaufgabe 16.1

Gib an, wie viele Fußleisten von je 2,50m man mindestens braucht.

Die Breite der Zimmertür soll vernachlässigt werden.

Man benötigt mindestens _____ Fußleisten.

RICHTIG	8 (Fußleisten)
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: 7,2 Fußleisten ODER 7 Fußleisten

Auswertung

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	III

Merkmale

Teilaufgabe 16.2

Eine Fußleiste von 2,50m Länge kostet 3€.

Gib an, wie teuer 30m Fußleisten sind.

_____ €

RICHTIG	36
---------	----

Auswertung

Leitidee	Zahl (L1)
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	II

Merkmale

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da mit Größen (Längen, Geldwerte) gerechnet wird. Bei Teilaufgabe 16.1 sind dem Aufgabentext zunächst die wichtigen Informationen zu den Maßen des Zimmers, der Länge einer Fußleiste sowie zur Berücksichtigung der vorhandenen Tür zu entnehmen (K6). Anschließend ist die Bodenfläche des Zimmers als Rechteck aufzufassen (K3) und dessen Umfang sowie die Zahl der hierfür benötigten Fußleisten zu berechnen (K5). Bei Teilaufgabe 16.2 kann der gesuchte Preis durch einen einfachen Proportionalitätsschluss berechnet werden (K5).

Analyse der Aufgabe

Aufgrund der direkten Anwendbarkeit mathematischer Verfahren gehören beide Teilaufgaben zum Anforderungsbereich I.

Zu 16.1:

- Statt des Umfangs wird der Flächeninhalt berechnet. Dies weist auf Defizite bezüglich der Grundvorstellungen zum Umfangs- und Flächeninhaltsbegriff hin.
- Die Breite der Tür wird mit einem fiktiven Maß berücksichtigt. Eine derartige genauere Modellierung ist zwar wünschenswert, jedoch nur bei gleichzeitiger Berücksichtigung des Verschnittes zweckmäßig (Defizit bzgl. K3).

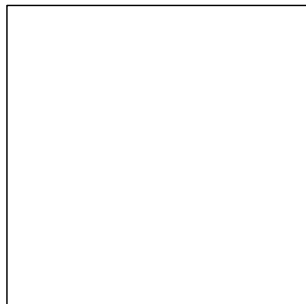
Mögliche Schwierigkeiten

Zu 16.2:

- Es wird nicht die Zahl der benötigten Fußleisten bei 30 m berechnet, sondern stattdessen mit der in Teilaufgabe 16.1 berechneten Anzahl an Fußleisten weiter gearbeitet.

Aufgabe 17: Quadratfläche

Bestimme den Flächeninhalt des gegebenen Quadrats.



Gib dein Ergebnis an.

Auswertung

RICHTIG	Der ermittelte Flächeninhalt liegt im Intervall $[25; 27,04] \text{ cm}^2$. Die Einheit des Ergebnisses ist anzugeben. Angaben in anderen Einheiten mit passender Maßzahl sind zulässig. Anmerkungen: • Die oben angegebene Lösung bezieht sich auf 5,1 cm Sollmaß der Quadratseitenlänge. Die Lösung ist bei drucktechnischen Abweichungen anzupassen. • Zulässige Toleranz beim Messen der Seitenlängen des Quadrats: $\pm 1 \text{ mm}$.
FALSCH	Alle Ergebnisse außerhalb des angegebenen Intervalls. Falsch sind auch Ergebnisse mit richtiger Maßzahl und falscher oder fehlender Einheit, z. B. 25 cm oder 26,01.

Merkmale

Leitidee	Messen (L2)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	II

Analyse der Aufgabe

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da ein Flächeninhalt zu ermitteln ist. Die hierzu benötigten Maße müssen in der Zeichnung gemessen werden (K4), bevor die bekannte Formel angewendet werden kann (K5).

Da sich die Anforderungen der Aufgabe auf Routineverfahren und -rechnungen beschränken, gehört diese Aufgabe zum Anforderungsbereich I.

Mögliche Schwierigkeiten

Es wird nicht der Flächeninhalt, sondern der Umfang des Quadrates ermittelt, was an mangelnden Vorstellungen zu den beiden Begriffen Flächeninhalt und Umfang liegen kann.

Aufgabe 18: Köthener Quadrate



Foto: © Heiko Rebsch

Im Landkreis Köthen hat man sich überlegt, wie man mehr Besucher auf diese Gegend aufmerksam machen kann. Dabei ist auch das Projekt „Köthener Quadrate“ entstanden. Das Foto zeigt eines dieser „Köthener Quadrate“.

In diesem Projekt hat ein Bauer in ein quadratisches Feld (100m Seitenlänge) ein kleineres Quadrat mit Sonnenblumen gepflanzt. Auf den vier dreieckigen Flächen wächst Kopfsalat. Die beiden rechteckigen Randstreifen außerhalb des großen Quadrats sind mit Blumenkohl bepflanzt.

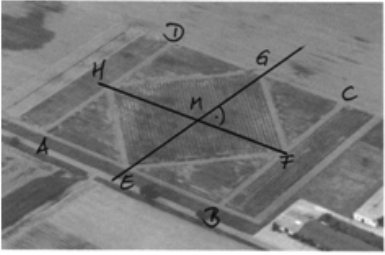
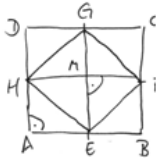
Die Anbauflächen für Kopfsalat und für Sonnenblumen sind annähernd gleich groß.

Begründe dies.

Du kannst auch Hilfslinien in das Foto einzeichnen.

RICHTIG	In der Begründung ist nachzuweisen, dass die vier Dreiecksflächen und das innere Quadrat flächeninhaltsgleich sind, z. B. durch Bezug auf Zerlegungsgleichheit oder Flächeninhaltsformeln. Mögliche Begründungen: Klappt man die vier Dreiecksflächen nach innen, so überdecken diese zusammen das gesamte innere Quadrat. ODER Durch Einzeichnen der Diagonalen lässt sich das innere Quadrat in vier Dreiecke unterteilen, die jeweils deckungsgleich zu den vier äußeren Dreiecken sind. ODER Zeichnet man in das innere Quadrat die Diagonalen ein, so entstehen vier kongruente Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke ist flächeninhaltsgleich zu einem äußeren Dreieck. Das große Quadrat besteht also aus acht kongruenten Teildreiecken, von denen je vier inner- und außerhalb des inneren Quadrats liegen. ODER Die ungefähren Größen der Anbauflächen für Kopfsalat (vier äußere Dreiecke) und für die Sonnenblumen (inneres Quadrat) werden einzeln errechnet und miteinander verglichen. Es gibt vier äußere Dreiecke mit $A_{\text{äußeres Dreieck}} = \frac{50m \cdot 50m}{2}$. Für den Kopfsalat steht eine Fläche von $A_{\text{vier äußere Dreiecke}} = \frac{50m \cdot 50m}{2} \cdot 4 = 5000m^2 \text{ zur Verfügung.}$ Die Anbaufläche der Sonnenblumen kann in vier Dreiecke unterteilt werden mit $A_{\text{inneres Dreieck}} = \frac{50m \cdot 50m}{2}$. Zusammen nehmen die Sonnenblumen eine Fläche von $A_{\text{vier innere Dreiecke}} = \frac{50m \cdot 50m}{2} \cdot 4 = 5000m^2$ ein. Beide Anbauflächen sind also gleich groß.
---------	---

Auswertung

RICHTIG	ODER  großes Quadrat: $ABCD$ kleineres Quadrat: $EFGH$ „Eckflächen“: $A, E, H,$ $E, F,$ F, C, G und H, G, D  $\triangle AEH \cong \triangle EHF$ Denn: $\overline{AE} = \overline{EH} = \overline{EF} = \overline{HE}$ $\overline{HE} = \overline{HE}$ $\angle EAH = \angle HFE = 90^\circ$ Analog für $\triangle EBF$ und $\triangle FGH$, $\triangle FCG$ und $\triangle HGD$ sowie $\triangle HGD$ und $\triangle HGE$ ODER Weil die Ecken des Quadrats immer in der Mitte des größeren Quadrats sind. ODER Ein Teil der Argumentation kann auch ersetzt werden durch direkte Kennzeichnungen im gegebenen Foto (z. B. auf kongruente Teilflächen hinweisende Pfeile). ODER (Grenzfall): Weil die vier äußeren Dreiecke zusammen das innere Quadrat ergeben.
FALSCH	Alle anderen Antworten. Z. B.: Auch die vier Dreiecke ergeben ein Quadrat. Anm.: Es ist in diesem Fall nicht klar, dass dieses Quadrat genauso groß wie das innen liegende Quadrat ist. ODER Die Dreiecke sind insgesamt gleichgroß wie das Quadrat in der Mitte. Anm.: Die Schülerlösung gibt lediglich die Behauptung wieder. ODER Wenn man die ganzen kleinen Dreiecke zusammenzählen würde, wären die Dreiecke genauso groß wie das Quadrat. Anm.: Unklar bleibt, welches Quadrat gemeint ist.

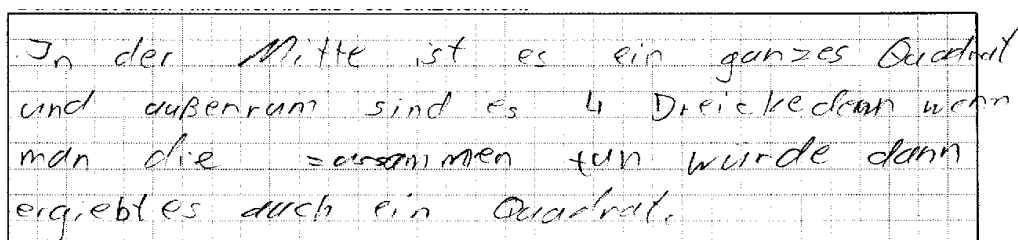
Merkmale	<table border="1"> <tr> <td>Leitidee</td><td>Messen (L2)</td></tr> <tr> <td>Allgemeine Kompetenz</td><td>Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch kommunizieren (K6)</td></tr> <tr> <td>Anforderungsbereich</td><td>III</td></tr> <tr> <td>Kompetenzstufe</td><td>IV</td></tr> </table>	Leitidee	Messen (L2)	Allgemeine Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch kommunizieren (K6)	Anforderungsbereich	III	Kompetenzstufe	IV
Leitidee	Messen (L2)								
Allgemeine Kompetenz	Mathematisch argumentieren (K1) Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch kommunizieren (K6)								
Anforderungsbereich	III								
Kompetenzstufe	IV								

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da hierbei Inhalte verschiedener gegebener Teilflächen zu vergleichen sind. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe muss zuerst der Text gelesen werden (K6), um relevante Angaben wie beispielsweise „kleineres Quadrat“, „vier dreieckige Flächen“ und „großes Quadrat“ zu erkennen. Dabei müssen die genannten Teilflächen in dem Foto identifiziert werden. Bei Bedarf kann auch die angegebene Seitenlänge zugeordnet werden. Um die Richtigkeit der Behauptung zur Größe der Anbauflächen für Kopfsalat und für Sonnenblumen zu begründen (K1), kann die Problemlösestrategie „Zerlegen in Teilfiguren“ genutzt werden (K2). Die Überprüfung selbst kann dabei zeichnerisch oder rechnerisch erfolgen. So können Hilfslinien eingezeichnet werden, um die Teilfiguren und deren Kongruenz erkennen und zur Argumentation nutzen zu können (K1). Bei einer rechnerischen Herangehensweise können die Größen der Teilflächen mittels Symmetrieüberlegungen berechnet werden (K1). Die in der Figur enthaltenen Dreiecke können dabei (gedanklich) nach innen geklappt, gespiegelt oder auch gedreht werden. Ebenso kann das „größere Quadrat“ durch Einzeichnen seiner Mittelsenkrechten unterteilt werden, um die entstehenden Teilflächen direkt vergleichen zu können (K2). Die Aufgabenbearbeitung schließt mit einer Darlegung der Begründung ab (K6). Weitere Erläuterungen zur Abgrenzung des Argumentierens und des Kommunizierens sind im Modul D zur Kompetenz Kommunizieren (vgl. dort 1.3) zu finden.

Das zur Bearbeitung der Aufgabe nötige Zusammenspiel der verschiedenen Kompetenzen und insbesondere die Anforderungen an das schlüssige Argumentieren legen eine Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich III nahe.

- Ausgehend von der Fehlvorstellung, dass Flächen mit gleichem Flächeninhalt auch die gleiche Form haben müssen, wird argumentiert, dass die Behauptung falsch ist (Defizit bzgl. K1).
- Zwar wird erkannt, dass die Anbauflächen für Kopfsalat und für Sonnenblumen gleich groß sind, die zugehörige Argumentation weist jedoch Lücken auf oder fehlt. Die folgende Schülerlösung verdeutlicht dies exemplarisch. Die Begründungsstrategie ist erkennbar, jedoch wird nicht begründet, warum das entstehende Quadrat zu dem gegebenen Innenquadrat deckungsgleich ist (Defizit bzgl. K1).



In der Mitte ist es ein ganzes Quadrat und außenrum sind es 4 Dreiecke. Wenn man die zusammen tun würde dann ergäbe es auch ein Quadrat.

- Das Identifizieren der Teilfiguren und ein Wechsel zwischen der textlichen Beschreibung und dem Foto gelingt nicht (Defizit bzgl. K6).

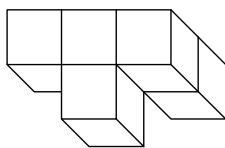
Mögliche Schwierigkeiten

Anregungen für den Unterricht

Werden zwei verschieden geformte Flächen fälschlich nicht als flächeninhaltsgleich erkannt, so können die betreffenden Flächen im Unterricht entsprechend der gegebenen Angaben maßstäblich gezeichnet werden. Ausgehend von dieser Zeichnung können die Größen beider Teilflächen – z. B. durch Anwenden der Zerlegungsstrategie – untersucht werden. Alternativ können verschiedene Figuren (Vielecke) aus einer fest vorgegebenen Zusammenstellung von Tangram-Teilen gelegt werden. Die entstehenden Figuren sehen zwar alle anders aus, sind aber flächeninhaltsgleich, da sie jeweils aus denselben Teilen bestehen. Eine weitere Möglichkeit zur Behebung der genannten Fehlvorstellung bietet der Einsatz von Geobrettern, die ein schnelles „Herstellen“ von Figuren ermöglichen und deren Flächeninhalte mit einfachen Mitteln wie z. B. Auszählen untersucht werden können. Dabei werden verschiedene Flächen mit Gummibändern gespannt und auf ihre Flächeninhalte hin betrachtet. Die Eigenschaften einer Figur können schnell durch Umspannen verändert werden, um gezielt beobachten zu können, wie sich diese Änderungen auf den Flächeninhalt (oder auch auf den Umfang) auswirken. Für solche Betrachtungen wird hier auch auf den didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Parallelogramm gesucht“ verwiesen.

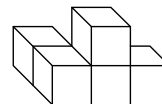
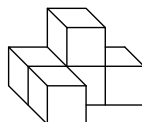
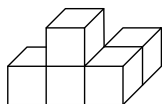
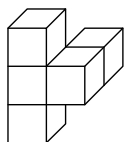
Aufgabe 19: Drehkörper

Ein Körper, der aus fünf gleich großen Würfeln besteht, wird gedreht.



Welcher der folgenden Körper kann sich ergeben?

Kreuze an.



Auswertung

RICHTIG 4. Kästchen wurde angekreuzt

Merkmale

Leitidee	Raum und Form(L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	I

Analyse der Aufgabe

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da gedanklich mit einem Körper zu operieren ist. Zur Bearbeitung der Aufgabe ist zunächst der gegebene Körper hinsichtlich seiner Zusammensetzung aus kleinen Würfeln zu analysieren und mit den zur Auswahl stehenden Körpern abzugleichen. Dabei muss der gegebene Körper in Gedanken gedreht werden, um zu überprüfen, welche der zur Auswahl stehenden Körper erzeugt werden kann (K4).

Da es sich um eine vertraute Darstellung handelt, gehört diese Aufgabe zum Anforderungsbereich I.

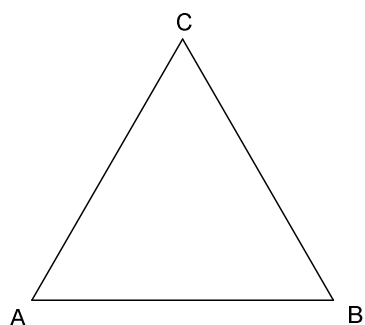
Mögliche Schwierigkeiten

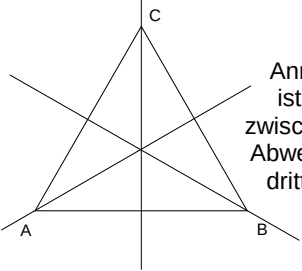
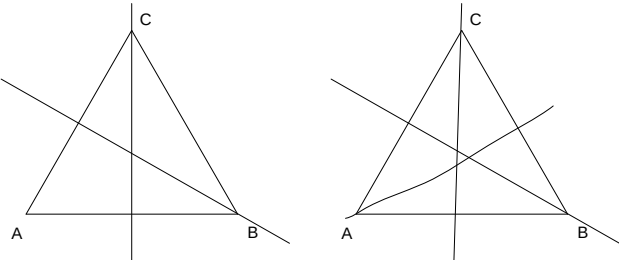
Antwortalternative 1, 2 oder 3 wurde angekreuzt: Dies deutet auf Schwächen hinsichtlich des räumlichen Vorstellungsvermögens hin. Dabei sind insbesondere die Alternativen 2 und 3 diagnostisch interessant, weil der hier abgebildete Körper durch räumliche Ebenenspiegelung des gegebenen Körpers entsteht.

Aufgabe 20: Regelmäßige Vielecke

Teilaufgabe 20.1

Zeichne in dem gegebenen gleichseitigen Dreieck **alle** Symmetrieachsen ein.



RICHTIG	Die Lösung ist richtig, wenn alle drei Symmetrieachsen eingezeichnet sind.  Anm.: Hinsichtlich der Lage der einzelnen Spiegelachsen ist darauf zu achten, dass diese senkrecht auf der Strecke zwischen den beiden jeweiligen Punkten stehen (1° Abweichung ist hierbei noch akzeptabel) und durch den dritten Punkt verlaufen.
FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten. Z. B.: 

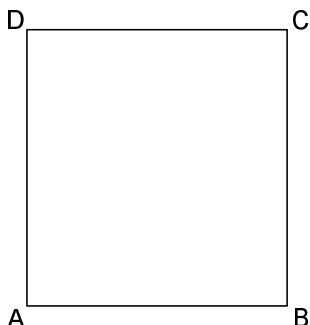
Auswertung

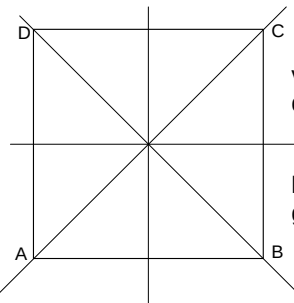
Leitidee	Raum und Form(L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	III

Merkmale

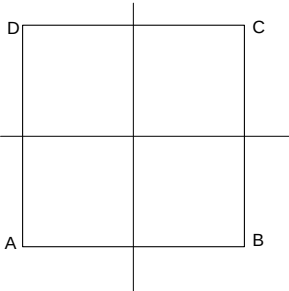
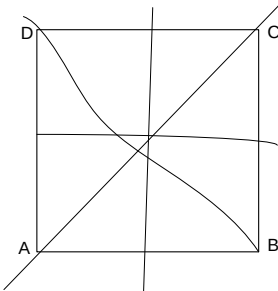
Teilaufgabe 20.2

Zeichne in dem gegebenen Quadrat **alle** Symmetrieachsen ein.



RICHTIG	Die Lösung ist richtig, wenn alle vier Symmetrieachsen eingezeichnet sind.  Anm.: Hinsichtlich der horizontal bzw. vertikal verlaufenden Spiegelachsen ist darauf zu achten, dass diese senkrecht auf den beiden gegenüberliegenden Seiten des Quadrats stehen und durch deren Mittelpunkte verlaufen. Die beiden diagonal verlaufenden Spiegelachsen müssen durch die beiden gegenüberliegenden Eckpunkte des Quadrats gehen. Bei einer Parallelverschiebung darf die vertikale und horizontale Spiegelachse maximal um ± 1 mm von der richtigen Lage abweichen. Bei „leichten Schiefungen“ ist 1° Abweichung zu akzeptieren.
---------	--

Auswertung

FALSCH	Alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten. Z. B.:	
		

Merkmale

Leitidee	Raum und Form(L3)
Allgemeine Kompetenz	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	II

Teilaufgabe 20.3

Wie viele Symmetrieachsen haben die in der Tabelle aufgeführten regelmäßigen Vielecke?

Zur Erinnerung: Bei einem regelmäßigen Vieleck (Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck) sind alle Seiten gleich lang und die Ecken liegen auf einem gemeinsamen Kreis.

Trage jeweils die Anzahl der Symmetrieachsen ein.

Regelmäßiges Vieleck	Anzahl der Symmetrieachsen
Fünfeck	
Sechseck	
27-Eck	

Auswertung

RICHTIG	Angabe der richtigen Symmetrieachsen-Anzahlen: Fünfeck: 5 UND Sechseck: 6 UND 27-Eck: 27
---------	---

Merkmale

Leitidee	Raum und Form(L3)
Allgemeine Kompetenz	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	III
Kompetenzstufe	IV

Analyse der Aufgabe

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da verschiedene ebene Figuren hinsichtlich ihrer Symmetrieachsen zu untersuchen sind. Zur Bearbeitung der ersten beiden Teilaufgaben ist es wichtig, sich die Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks bzw. eines Quadrats zu vergegenwärtigen. Hierauf aufbauend können die Symmetrieachsen (ggf. als gedachte „Faltlinien“) eingezeichnet werden (K4). Für die Bearbeitung der Teilaufgabe 20.3 ist es zunächst nötig, die im Aufgabentext enthaltene allgemeine Beschreibung regelmäßiger Vielecke inhaltlich zu erfassen (K6). Anschließend ist der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Ecken regelmäßiger Figuren und der Anzahl der Spiegelachsen zu erkennen. Dabei kann auf die Ergebnisse der beiden ersten Teilaufgaben zurückgegriffen oder aber eine beispielgebundene Untersuchung am Fünfeck bzw. am Sechseck vorgenommen werden (K2). In jedem Fall ist eine Verallgemeinerung notwendig, da der Fall des 27-Ecks sicherlich nicht konkret untersucht wird.

Da es sich bei den ersten beiden Teilaufgaben um vertraute Darstellungen handelt und zur Bearbeitung der Aufgaben Grundkenntnisse der Mathematik bzw. Routine-

verfahren angewendet werden können, gehören beide Teilaufgaben zum Anforderungsbereich I. Bei Teilaufgabe 20.3 hingegen ist es aufgrund des zu erkennenden allgemeinen Zusammenhangs zwischen der Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vierecks und der Anzahl der Symmetrieachsen naheliegend, diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Mögliche Schwierigkeiten

Zu 20.1:

- Es wird lediglich die vertikal verlaufende Spiegelachse eingezeichnet (Defizit bzgl. K4).

Zu 20.2:

- Als Spiegelachsen werden nur die Mittelsenkrechten der vier Seiten eingezeichnet. Die Diagonalen des Quadrates werden vernachlässigt (Defizit bzgl. K4).

Zu 20.3:

- Die Anzahl der Spiegelachsen beim Fünfeck und beim Sechseck werden nicht korrekt notiert und die Regelmäßigkeit wird so nicht erkannt. Die Anzahl der Spiegelachsen bei einem 27-Eck wird dann gar nicht angegeben.

Glossar

AB I	Anforderungsbereich I: Reproduzieren
AB II	Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen
AB III	Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren
K1	Allgemeine Kompetenz: Mathematisch argumentieren
K2	Allgemeine Kompetenz: Probleme mathematisch lösen
K3	Allgemeine Kompetenz: Mathematisch modellieren
K4	Allgemeine Kompetenz: Mathematische Darstellungen verwenden
K5	Allgemeine Kompetenz: Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen umgehen
K6	Allgemeine Kompetenz: Mathematisch kommunizieren
L1	Leitidee 1: Zahl
L2	Leitidee 2: Messen
L3	Leitidee 3: Raum und Form
L4	Leitidee 4: Funktionaler Zusammenhang
L5	Leitidee 5: Daten und Zufall

Ausführlichere Erläuterungen zu den Abkürzungen können Sie im Modul B „Fachallgemeine Erläuterungen“ der Mathematik Sekundarstufe 1 nachlesen.