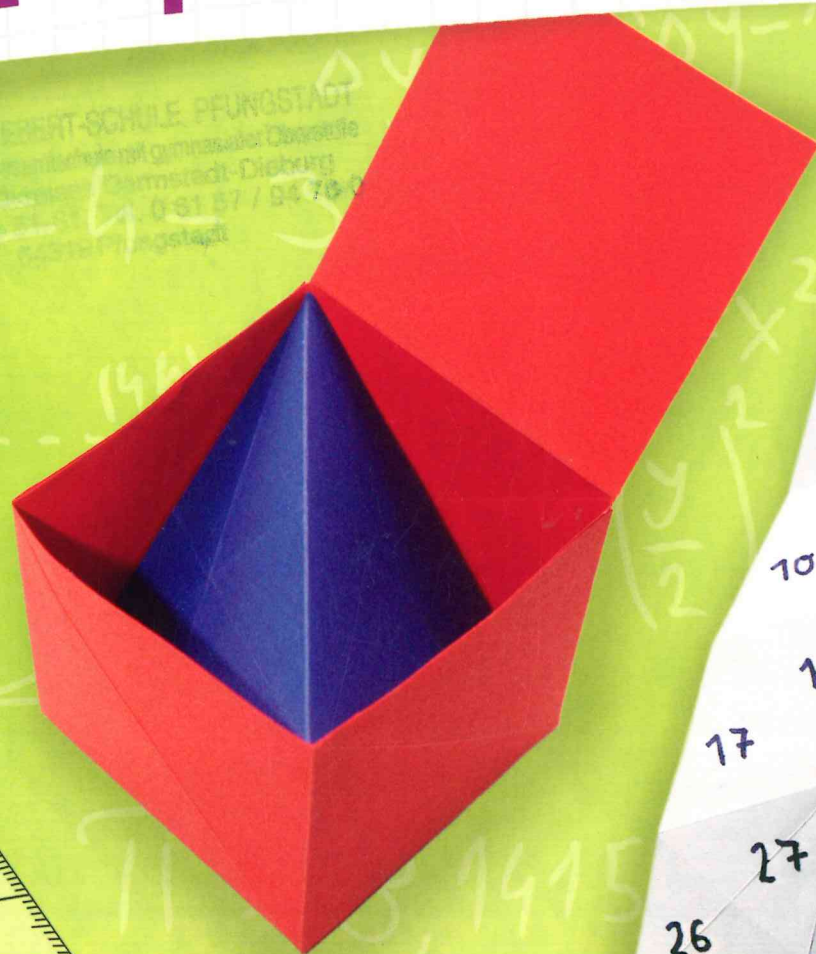


Mathe verstehen durch Papierfalten

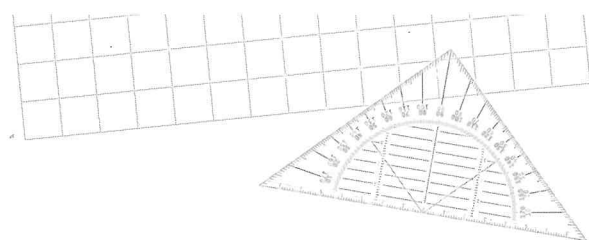


Anleitungen und Arbeitsblätter
für die Sekundarstufe

Heiko Etzold | Ines Petzschler



Impressum



Titel

Mathe verstehen durch Papierfalten

Anleitungen und Arbeitsblätter für die Sekundarstufe

Autoren

Heiko Etzold, Ines Petzschler

Titelbildmotiv unter Verwendung von

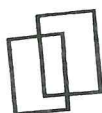
Formeln © Dario Sabljak | Fotolia.com, Geodreieck © Felix Pergande | Fotolia.com

Grafiken und Fotos

Heiko Etzold, Ines Petzschler

Alle Grafiken in diesem Band wurden mithilfe der Programme *Cinderella* und *Inkscape* von den Autoren selbst erstellt.

Bei abweichendem Urheber steht die Bildquelle direkt am Bild.



Verlag an der Ruhr

Mülheim an der Ruhr

www.verlagruhr.de

Geeignet für die Klassen 5–13

Unser Beitrag zum Umweltschutz:

Wir sind seit 2008 ein ÖKOPROFIT®-Betrieb und setzen uns damit aktiv für den Umweltschutz ein. Das ÖKOPROFIT®-Projekt unterstützt Betriebe dabei, die Umwelt durch nachhaltiges Wirtschaften zu entlasten. Unsere Produkte sind grundsätzlich auf chlorfrei gebleichtes und nach Umweltschutzstandards zertifiziertes Papier gedruckt.

Urheberrechtlicher Hinweis:

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Im Werk vorhandene Kopiervorlagen dürfen vervielfältigt werden, allerdings nur für jeden Schüler der eigenen Klasse/des eigenen Kurses. Die dazu notwendigen Informationen (Buchtitel, Verlag und Autor) haben wir für Sie als Service bereits mit eingedruckt. Diese Angaben dürfen weder verändert noch entfernt werden. Die Weitergabe von Kopiervorlagen oder Kopien (auch von Ihnen veränderte) an Kollegen, Eltern oder Schüler anderer Klassen/Kurse ist nicht gestattet.

Der Verlag untersagt ausdrücklich das Herstellen von digitalen Kopien, das digitale Speichern und Zurverfügungstellen dieser Materialien in Netzwerken (das gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen), per E-Mail, Internet oder sonstigen elektronischen Medien außerhalb der gesetzlichen Grenzen. Kein Verleih. Keine gewerbliche Nutzung. Zuwiderhandlungen werden zivil- und strafrechtlich verfolgt.

Bitte beachten Sie die Informationen unter www.schulbuchkopie.de.

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle kann keine Haftung für die Inhalte externer Seiten, auf die mittels eines Links verwiesen wird, übernommen werden. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

© Verlag an der Ruhr 2014

ISBN 978-3-8346-2626-4

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und didaktisch-methodische Hinweise 4

Didaktisch-Methodisches zum Papierfalten.	4
Zum Aufbau des Buches	6
Allgemeine Tipps.	7

Allgemeine Faltanleitungs- und Infokarten 8

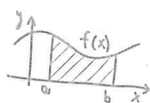
<i>Anleitungskarte:</i> Gleichseitiges Dreieck aus einem DIN-A4-Blatt	8
<i>Anleitungskarte:</i> Gleichseitiges Dreieck aus einem quadratischen Blatt.	9
<i>Anleitungskarte:</i> Senkrechte, Parallele und Quadrat	10
<i>Anleitungskarte:</i> Kreisel.	11
<i>Infokarte:</i> Regelmäßige Polyeder	12

$\frac{5}{3} \frac{3}{2}$ 13 | Leitidee Zahl

Zahlenmuster im Dreieck.	14
Brüche im Dreieck	18
Schnittpunkte	21
Exponentielles Wachstum	24
Unendlich viele Brüche	26
Kombinatorik	28

31 | Leitidee Messen

Innenwinkelsatz.	32
Mittelwerte falten	34
Volumenbetrachtung	36
Tetraeder	38
Flächeninhalte begründen.	42



47 | Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Geraden im Quadrat	48
Kurven falten	50
Umkehrfunktion.	56
Geradengleichungen	59
Dreidimensionales Koordinatensystem	62



67 | Leitidee Daten und Zufall

Wahrscheinlichkeiten mit dem Flugschreiber	68
Kreisel	72
Den Goldenen Schnitt erkunden	76



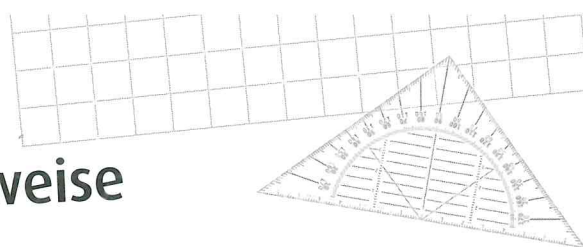
81 | Leitidee Raum und Form

Quadrat falten	82
Winkel und Figuren	84
Kreisrund	86
Satz des Thales	88
Runde Kurven falten	90
Kongruenz und Ähnlichkeit	93
Regelmäßige Polyeder	96
Tetraeder im Würfel.	100
Einfach nur falten.	102
Vektoren im Quadrat	106
Vektoren im Viereck.	108

Übersichtstabelle: Alle Faltungen auf einem Blick 111

Quellen und Medientipps 112

Vorwort und didaktisch-methodische Hinweise



Liebe Kollegen*,

mit diesen Materialien möchten wir Sie unterstützen, Ihren Schülern ganz im Sinne des **handlungsorientierten, entdeckenden Lernens** neue Zugänge zur Mathematik zu bieten. Die **30 fertig ausgearbeiteten Einheiten zum Papierfalten** zu verschiedensten Themen der **gesamten Sekundarstufe** garantieren Anschaulichkeit, nutzen den Knobel- und Entdeckergeist Ihrer Klassen und ermöglichen es Ihnen, die **Inhalte für die Schüler** im wahrsten Sinne des Wortes **begreifbar** zu machen. Bestimmt machen auch Sie selbst die ein oder andere spannende Entdeckung! Doch bevor Sie mit dem Falten loslegen, möchten wir Ihnen ein paar hilfreiche Hinweise zum Falten allgemein und zum Umgang mit dem Material in diesem Buch sowie einige praktische Tipps zur Umsetzung mit auf den Weg geben.

* Aus Gründen der besseren Lesbarkeit haben wir in diesem Buch durchgehend die männliche Form verwendet. Natürlich sind damit auch immer Frauen und Mädchen gemeint, also Lehrerinnen, Schülerinnen etc.

Didaktisch-Methodisches zum Papierfalten

Zum Falten allgemein

Seit fast 1000 Jahren falten Menschen Papier, um daraus filigrane und immer lebensechter aussehende Figuren herzustellen. Insbesondere in Japan wird die Kunst des Origami geschätzt und hat sich über die ganze Welt bis hin zur mathematischen Forschung verbreitet.

Dass diese **Faltungen auch im Mathematikunterricht** genutzt werden können, ist schon aufgrund der Formenvielfalt äußerst naheliegend. Wir haben uns in diesem Buch jedoch bewusst gegen Origami oder ähnliche an Ästhetik orientierte Faltungen entschieden, da wir den **Prozess des Faltens in seiner ursprünglichen Form und die dahinterstehende Mathematik** elementar betrachten wollen.

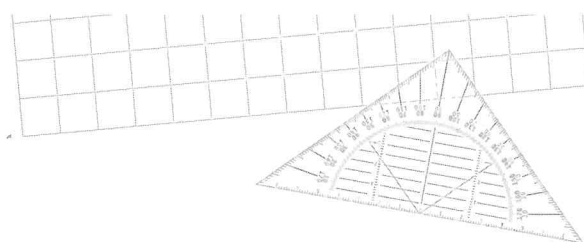
So fassen wir das Falten bei den meisten der vorgestellten Einheiten nicht als Mittel zum Zweck (damit etwas Schönes entsteht) auf, sondern als Zweck an sich. In diesem Zusammenhang steht auch die Frage: **Was ist Falten überhaupt?**

Sind auf einem Blatt Papier zwei Punkte gezeichnet und werden diese aufeinandergefoldet, so entsteht als Faltlinie die **Mittelsenkrechte** dieser beiden Punkte (Abb. 1). Doch warum ist das so?



Abb. 1

Vorwort und didaktisch-methodische Hinweise



Sind die Punkte A und B aufeinandergefoldet, so haben beide bezüglich der Faltlinie dieselbe Lagebeziehung. Irgendein Punkt C auf der Faltlinie hat zu A und B denselben Abstand. Mathematisch ausgedrückt: Die Faltlinie ist die Menge aller Punkte, die zu A und B denselben Abstand haben. Oder kurz: Die Faltlinie ist die Mittelsenkrechte zu A und B (Abb. 2).

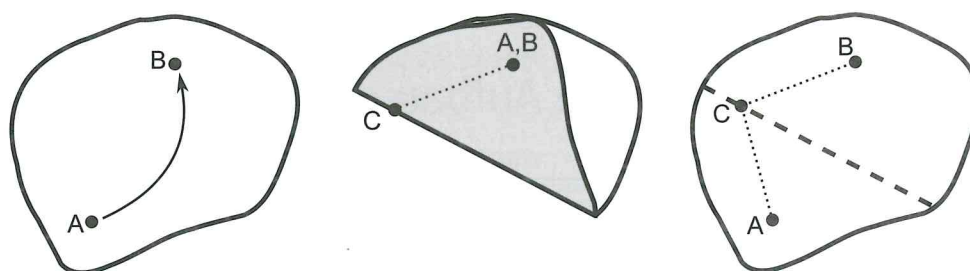


Abb. 2

Werden dagegen zwei Kanten, die nicht zueinander parallel sind, aufeinandergefoldet, so entsteht die **Winkelhalbierende** dieser beiden Kanten (Abb. 3):

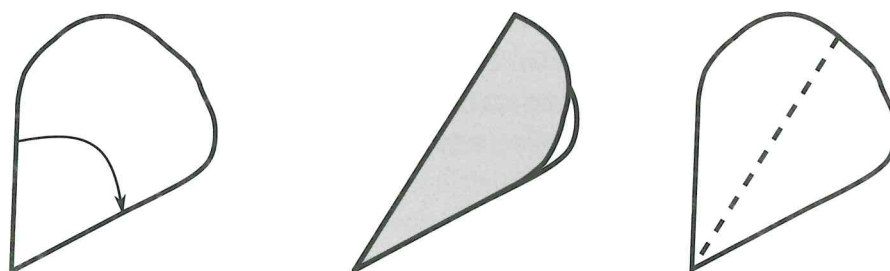
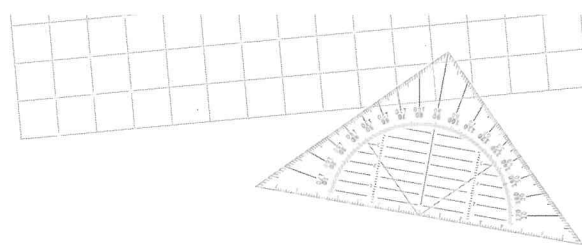


Abb. 3

Das wirkt nun erst einmal recht theoretisch. Das Falten als Handlung allerdings soll bei den Schülern das **Verinnerlichen** dieser Theorie unterstützen: Ich falte, also lege ich A und B übereinander. Letztlich ist dies eine geometrische Abbildung, die hier durch eine intuitive Handlung ausgeführt wird. Selbst wenn die Mathematik dahinter nicht sofort von allen Schülern erkannt wird – so wird dennoch Mathematik betrieben. Diese einfache Aufgabe zeigt auch schon das **Differenzierungspotenzial**. So erkennen einige Schüler vielleicht nur, dass A und B übereinanderliegen. Andere sehen, dass die Mittelsenkrechte entsteht, und wiederum andere können dies sogar begründen. Dass dies alles durch eine händische Tätigkeit passiert, soll den Lernprozess weiter unterstützen.

Ziel dieses Buches ist es also, dass die Schüler anhand konkreter, geführter Aufgaben **Zusammenhänge bei Faltfiguren erkennen und Begründungen dafür finden**. Darüber hinaus wird die (fachsprachliche) **Kommunikation** der Schüler untereinander unterstützt und gefördert.

Die Stärken des Faltens liegen dabei in der **Handlungsorientierung**, der **Selbstdifferenzierung**, der **Kommunikations- und Argumentationsförderung** und nicht zuletzt darin, dass dabei ganz viel Mathematik betrieben wird.



Das Papierformat

In der Regel haben wir uns bei unseren Faltungen auf das **DIN-A4-Format** bezogen. Die Gründe dafür sind die einfache Verfügbarkeit und der im Vergleich zum Origami-Papier günstige Preis.

Auch mathematisch ist das DIN-A4-Papier durchaus interessant, da es das einzige Format ist, das bei (korrekter) Halbierung das Seitenverhältnis nicht verändert. Aus dieser Bedingung heraus lässt sich herleiten, dass das Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ sein muss. Auch der Flächeninhalt eines DIN-A4-Blattes lässt sich leicht bestimmen, wenn man weiß, dass laut DIN-Norm ein DIN-A0-Blatt eine Fläche von 1m^2 hat und sich bei jedem nächstkleineren Format der Flächeninhalt halbiert. Diese Betrachtungen werden in der Einheit „Einfach nur falten“ (S. 102) genutzt.

An manchen Stellen haben wir aus inhaltlichen Gründen auf **quadratisches Papier** zurückgegriffen, wie z. B. bei „Geraden im Quadrat“ (S. 48).

Spielt das Papierformat bzw. die Form des Papiers für die Faltung keine Rolle, so sollte möglichst auf „**unregelmäßige**“ Formen zurückgegriffen werden, da sich sonst die Schüler fälschlicherweise an den Seitenrändern orientieren könnten (vgl. auch „Quadrat falten“, S. 82).

Verbindung mit dynamischer Geometriesoftware

Eng im Zusammenhang mit Faltungen lässt sich ergänzend auch dynamische Geometriesoftware (DGS) einsetzen. Bekannte Programme sind „GeoGebra“, „Cinderella“, „Geonext“ usw. So kann bspw. das auf S. 4 dargestellte Problem mit einem DGS „nachgebastelt“ werden. Eine mögliche Aufgabe könnte dabei lauten: „Konstruiere mithilfe eines DGS die Faltlinie, die entsteht, wenn man die beiden Punkte aufeinanderfaltet“. Hier müssten die Schüler zunächst darüber nachdenken, welche Eigenschaften die Faltlinie hat. Auf diese Weise wären sie gezwungen, die Eigenschaften der Mittelsenkrechten zu nutzen und diese in einem DGS umzusetzen. In der Regel gibt es dafür fertige Werkzeuge, ansonsten ermittelt man den Mittelpunkt von A und B und zeichnet dadurch die Senkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.

Der Einsatz eines DGS gibt den Schülern die Möglichkeit, den Faltvorgang noch einmal zu verinnerlichen und die Faltung aus einer etwas anderen Perspektive zu betrachten. Wir haben daher zu einigen Einheiten, bei denen sich der Einsatz von DGS aus unserer Sicht lohnt, entsprechende **Tipps und Hinweise auf den Lehrerseiten** notiert und diese mit Screenshots des DGS-Programms „Cinderella“ (siehe www.cinderella.de) versehen.

Zum Aufbau des Buches

Das Buch gliedert sich in **fünf Kapitel zu den großen mathematischen Leitideen**, zu denen Sie jeweils verschiedene Falteinheiten finden, die sich alle in **nicht mehr als einer Unterrichtsstunde** bewältigen lassen. Die Falteinheiten gliedern sich wiederum in **erklärende Lehrerseiten** und dazu passende **kopierfertige Arbeitsblätter für die Schüler**.

Lehrerseiten

Auf den Lehrerseiten finden Sie zunächst die Angaben, für welche **Klassenstufe** die Einheit geeignet ist und welche **Materialien** benötigt werden. Im Hinblick auf die Jahrgangsstufen konnten natürlich nicht die Lehrpläne aller Bundesländer beachtet werden – nutzen Sie diese Angabe bitte nur zur Orientierung. Letztendlich liegt es in Ihrem Ermessen, welche Faltung Sie Ihrer Lerngruppe zutrauen.

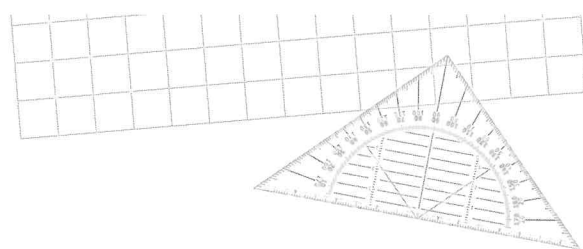
Anschließend bietet Ihnen jede Lehrerseite ausführliche **didaktische Hinweise** zu der Faltung sowie **methodische Tipps und Lösungen** zu allen Aufgaben der dazugehörigen Arbeitsblätter.



Neben der allgemeinen Selbstdifferenzierung des Faltens erhalten Sie an einigen Stellen auch ganz **konkrete Differenzierungstipps**, um alle Schüler mit ins (Falt-)Boot zu holen.

Arbeitsblätter

Die Arbeitsblätter sind durch die **Angabe der benötigten Materialien** und die ausführlichen **Schritt-für-Schritt-**



Anleitungen zu jeder Faltung so konzipiert, dass sie von den Schülern gut **selbstständig bearbeitet** werden können. Es bietet sich also auch an, die eine oder andere Faltung als Hausaufgabe aufzugeben oder sie an leistungsstärkere Schüler auszuteilen.

Bei Arbeitsblättern, die aus zwei Seiten bestehen, haben wir darauf geachtet, dass einzelne Aufgaben nicht seitenübergreifend sind. Dies bietet sich ebenfalls zur Differenzierung an, da meist die **Aufgaben der ersten Seite ein wenig leichter** sind als die der zweiten Seite.

Regelmäßig benötigte Falthanleitungen

Einige Faltungen, wie z. B. das gleichseitige Dreieck, das aus einem DIN-A4-Blatt hergestellt wird, tauchen in diesem Buch immer wieder auf. Um nicht immer wieder ein Arbeitsblatt dafür kopieren zu müssen (und da Ihre im Falten geübten Schüler das sicherlich bald auch ohne Anleitung können), gibt es dazu **gesonderte Anleitungskarten** vor den eigentlichen Kapiteln (ab S. 8). Diese können Sie bspw. **laminieren und bei Bedarf im Unterricht wiederverwendbar einsetzen**. Bei den entsprechenden Falteinheiten in den Hauptkapiteln steht die benötigte Anleitungskarte dann in der Materialliste.

Es gibt auch einige Arbeitsblätter, bei denen sich der Einsatz der allgemeinen Anleitungskarten zwar anbietet, dies aber vielleicht von Ihnen gar nicht gewollt ist (z. B. „Quadrat falten“, S. 82), weil Ihre Schüler erst einmal selbst überlegen und knobeln sollen. In diesen Fällen sind die Anleitungskarten bewusst nicht als benötigtes Material auf den Arbeitsblättern notiert – auf den Lehrerseiten steht aber selbstverständlich dennoch ein entsprechender Hinweis mit dabei.

Alle Faltungen auf einen Blick

Am Ende des Buches (S. 111) finden Sie schließlich noch einmal eine **Übersichtstabelle**, anhand derer Sie sich schnell einen Überblick über alle Faltungen verschaffen können. Auf einen Blick sehen Sie hier, **welche Falteinheit sich für welche Klassenstufe eignet**, und können so passgenau das richtige Material für Ihre Lerngruppe herausuchen.

Allgemeine Tipps

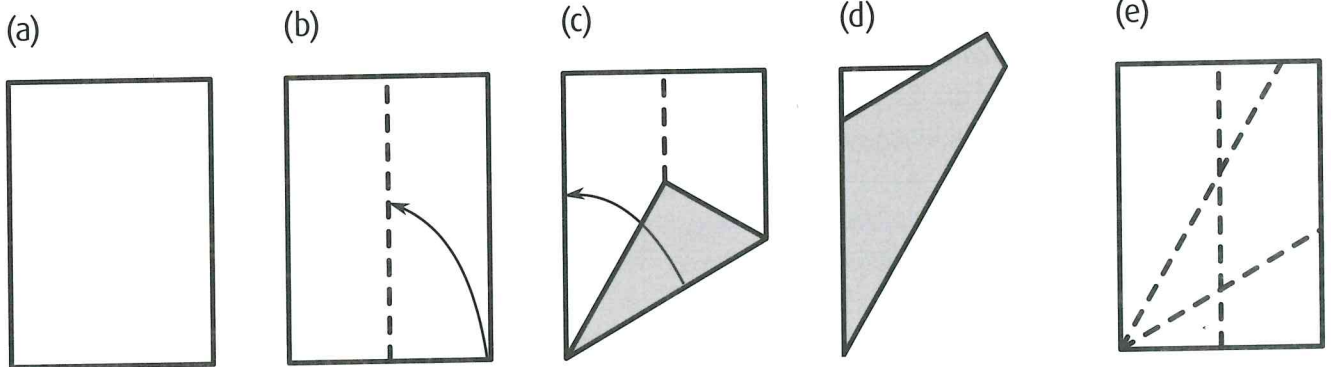
Bevor Sie nun mit dem Falten starten, möchten wir Ihnen noch **ein paar praktische Tipps** mit auf den Weg geben, die auf unseren Erfahrungen mit Faltungen im Unterricht basieren und Ihnen sicherlich eine gute Hilfestellung bieten:

- ▲ Nutzen Sie möglichst **Umweltpapier (leicht gräulich) oder hellblaues Papier zum Falten**. Bei diesem sind die Faltlinien besonders gut zu erkennen. Je dunkler das Papier ist, desto schlechter sieht man auch, ob man die Kanten exakt übereinandergelegt hat, da sich der Schatten schwer vom Papier abhebt. Auch sollte das Papier keine Linien oder Kästchen aufweisen, da die Schüler sich sonst fälschlicherweise daran orientieren.
- ▲ Die Schüler sollten die **bearbeiteten Arbeitsblätter zusammen mit den Faltungen** (z. B. in einer Klarsichthülle) **in einer Mappe abheften**. So können die Schüler jederzeit nachvollziehen, was sie wie (und warum) gefaltet haben.
- ▲ Für das bei der einen oder anderen Aufgabe benötigte **quadratische Papierformat** empfehlen wir, **Origami-Papier** zu nutzen. Zwar kann auch recht leicht aus einem DIN-A4-Blatt ein Quadrat erstellt werden, beim Ausschneiden kommt es allerdings immer zu Ungenauigkeiten (sei es von der Lage oder auch der Form der Schnittkante). Bedenken Sie stets: Schon kleinste Unregelmäßigkeiten im Papierformat können sich stark auf die Exaktheit der Faltung auswirken.

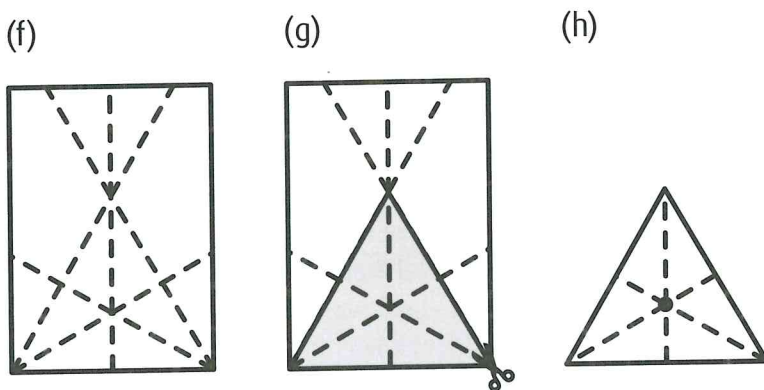
Nun wünschen wir Ihnen und Ihren Schülern viel Freude beim Falten und zahlreiche spannende Entdeckungen!

Heiko Etzold
Ines Petzschler

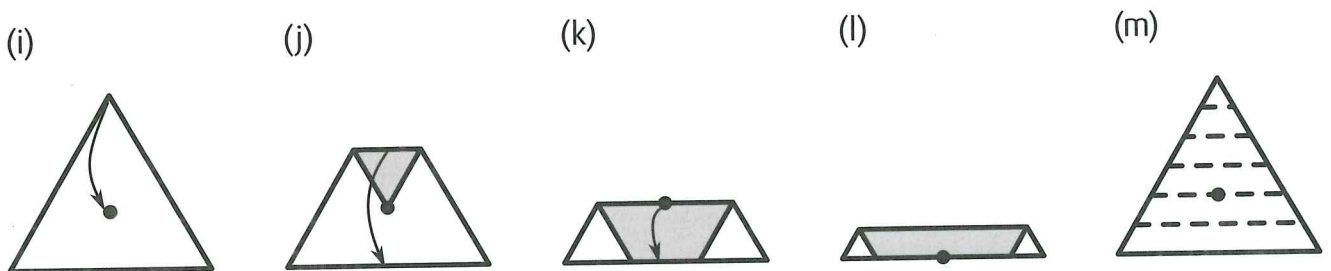
Gleichseitiges Dreieck aus einem DIN-A4-Blatt



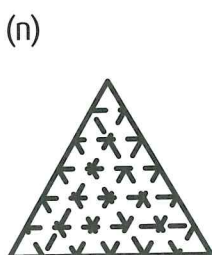
Wiederhole die Schritte (b) bis (d) auch mit der linken Seite.



Schneide dann das Dreieck entlang der Faltlinien sorgfältig aus.

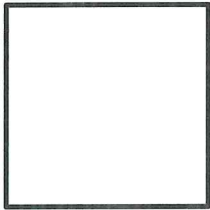


Wiederhole die Schritte (i) bis (m) mit den anderen beiden Ecken des Dreiecks.

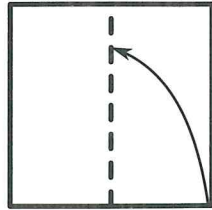


Gleichseitiges Dreieck aus einem quadratischen Blatt

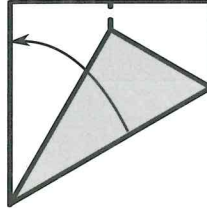
(a)



(b)



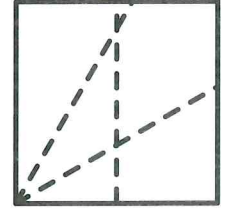
(c)



(d)

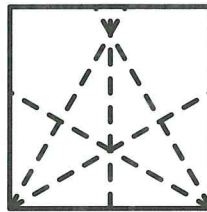


(e)

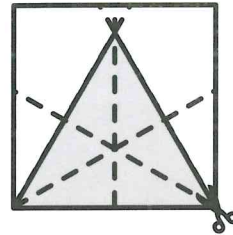


Wiederhole die Schritte (b) bis (d) auch mit der linken Seite.
Schneide dann das Dreieck entlang der Faltlinien sorgfältig aus.

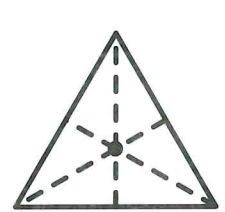
(f)



(g)



(h)

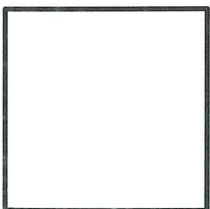


© Verlag an der Ruhr | Etzold, Petzschler | ISBN 978-3-8346-2626-4 | www.verlagruhr.de

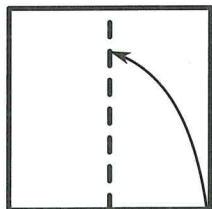


Gleichseitiges Dreieck aus einem quadratischen Blatt

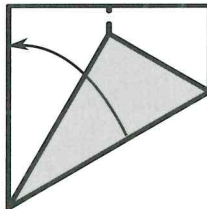
(a)



(b)



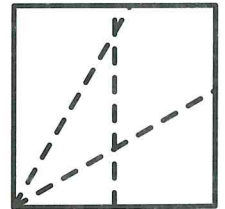
(c)



(d)

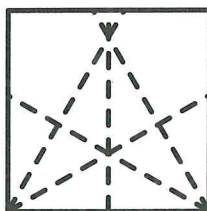


(e)

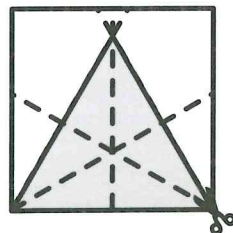


Wiederhole die Schritte (b) bis (d) auch mit der linken Seite.
Schneide dann das Dreieck entlang der Faltlinien sorgfältig aus.

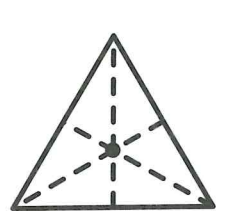
(f)



(g)

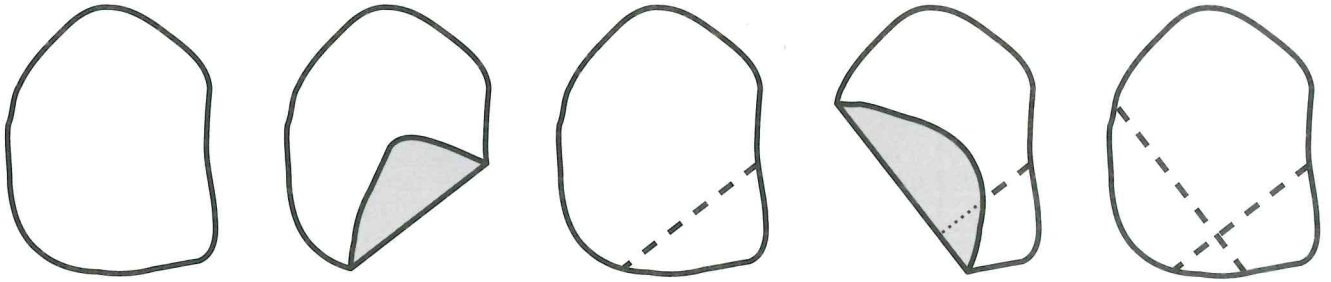


(h)



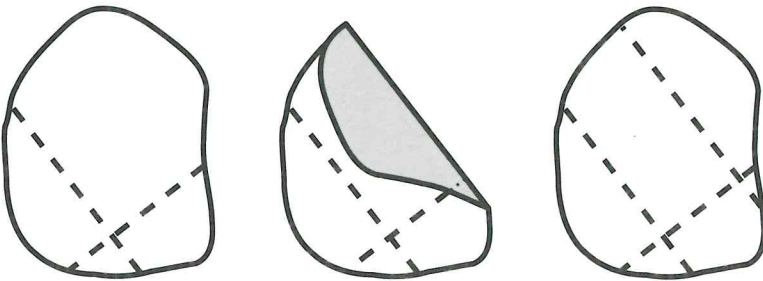
Senkrechte, Parallelele und Quadrat

So werden zueinander senkrechte Linien gefaltet

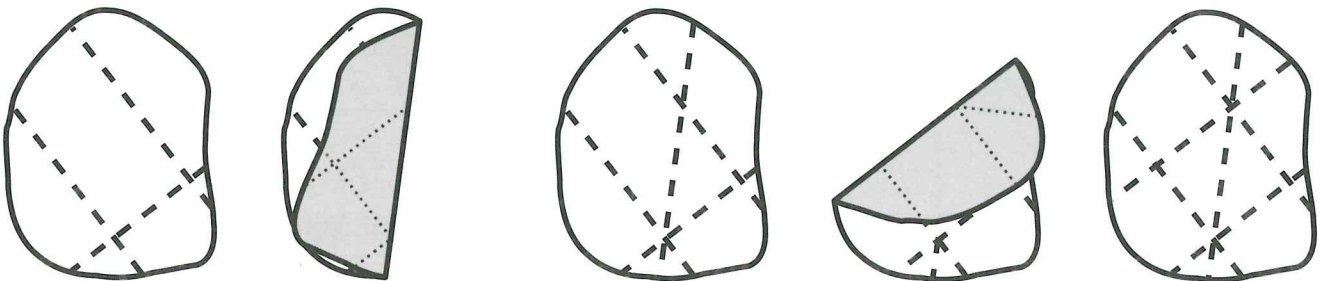


So werden zueinander parallele Linien gefaltet

Sie entstehen als Senkrechte der Senkrechten (s. o.):



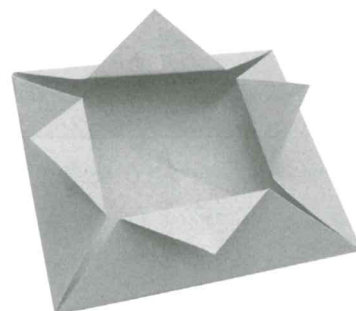
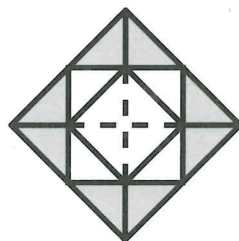
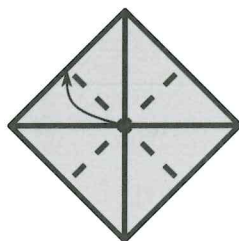
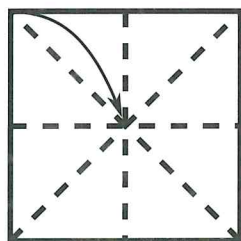
Und so wird ein Quadrat gefaltet



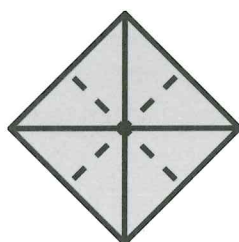
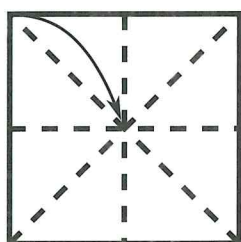
Kreisel

Vorbereitung der einzelnen Teile

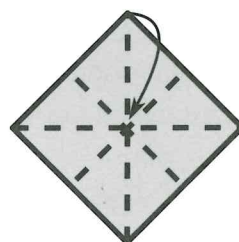
Erstes quadratisches Blatt:



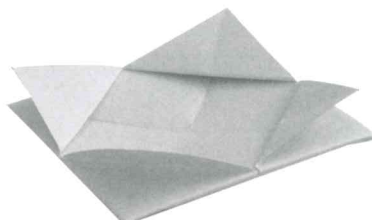
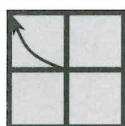
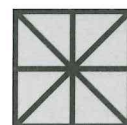
Zweites quadratisches Blatt:



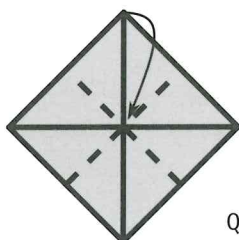
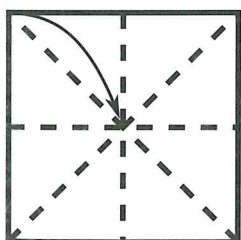
wenden



wenden



Drittes quadratisches Blatt:



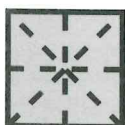
Quadrat in beide Richtungen diagonal halbieren und wieder aufklappen



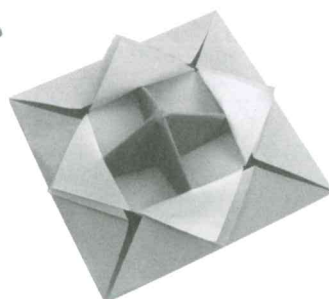
wenden



Quadrat einmal horizontal und einmal vertikal halbieren und wieder aufklappen



zu einer Spitze falten →



Fertiger Kreisel

Schiebe nun die drei Teile ineinander:

Brüche im Dreieck

Klasse: 5/6

Material: DIN-A4-Blätter, *Anleitungskarte* „Gleichseitiges Dreieck aus einem DIN-A4-Blatt“, Scheren

Didaktische Hinweise

Brüche begleiten die Schüler während ihrer gesamten Schullaufbahn. Sei es beim Bestimmen von Anteilen, beim Umstellen von Formeln und Termen, beim Lösen von Gleichungen oder beim Berechnen von Wahrscheinlichkeiten – überall ist für einen gesicherten und flexiblen Umgang mit diesen Dingen eine **Grundvorstellung zu Brüchen** nötig.

Bei dieser Falteinheit erstellen die Schüler aus einem gleichseitigen Dreieck gleich große Teile, von denen dann einige gesondert betrachtet werden.

Lösungen und methodische Tipps

zu 1. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{5}{9}$

zu 2. Es entsteht ein Sechseck. Dieses ist regelmäßig, da es aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht.

zu 3. Das Sechseck nimmt $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ des großen Dreiecks ein (Abb. 1).

zu 4. Es entsteht ein **Dreieck** in einem **Sechseck**. Die innere Figur nimmt $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ des Sechsecks ein (Abb. 2).

zu 5. Hier sind individuelle Lösungen möglich.

zu 6. Der Stern nimmt $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ des großen Dreiecks ein.

Abb. 3 und 4 zeigen einmal das aufgefaltete Dreieck, wenn der Stern vorher eingefärbt wurde, und einmal den Stern in das ursprüngliche Dreieck eingezeichnet.

Achtung: Der Stern muss vor dem Einfärben unbedingt gewendet werden, damit alle schraffierten Dreiecke auf einer Seite des großen Dreiecks sind!

Alternative: Es können auch auf der nicht gewendeten Seite des Sterns die drei kleinen Spitzen nach innen gefaltet werden. Das entstandene mittelgroße Dreieck besteht dann aus 9 kleinen Dreiecken. Da diese Figur 4-mal übereinanderliegt, besteht das ursprüngliche Dreieck aus 36 kleinen Dreiecken. Davon entfallen auf den Stern 12 Stück (ein mittelgroßes Dreieck und drei kleine Spitzen), womit er einen Flächenanteil von $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ am Gesamtdreieck hat.

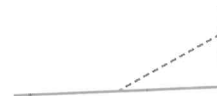


Abb. 1

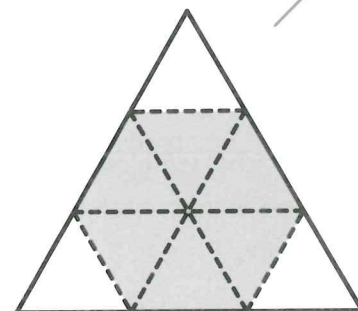


Abb. 2

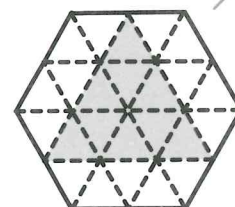


Abb. 3

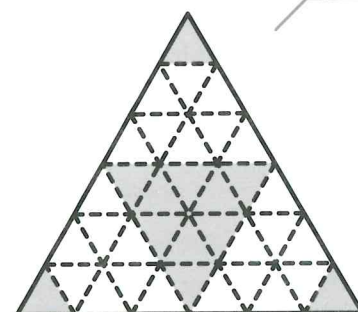
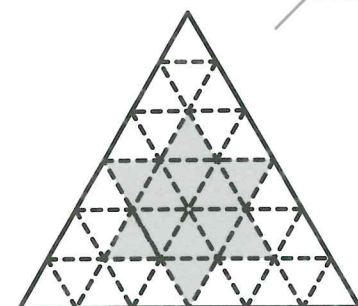


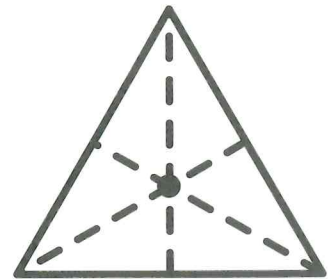
Abb. 4



Brüche im Dreieck (1/2)

Das brauchst du:

- ✓ DIN-A4-Blatt
- ✓ Anleitungskarte:
„Gleichseitiges Dreieck aus einem DIN-A4-Blatt“
- ✓ Schere



Vorbereitung

Stelle zunächst ein gleichseitiges Dreieck her (Schritte (a) bis (h) auf der Anleitungskarte).

Aufgaben

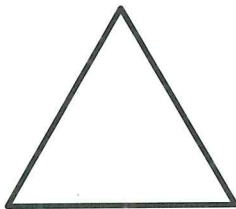
1. Du kannst nun mehrere Figuren falten. Kreuze an, welchen Bruch diese darstellen, wenn das große Dreieck ein Ganzes ist.

☒ 1

a) ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{2}{3}$

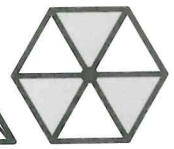
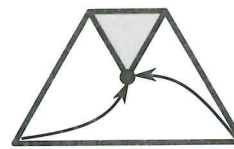
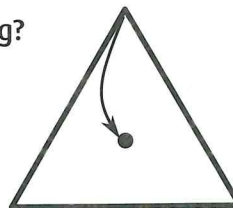
b) ☐ $\frac{8}{9}$ ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{7}{8}$

c) ☐ $\frac{4}{5}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{5}{9}$



2. Falte dein Dreieck entsprechend der Anleitung rechts. Welche Figur erkennst du? Ist die Figur regelmäßig? Begründe.

.....
.....



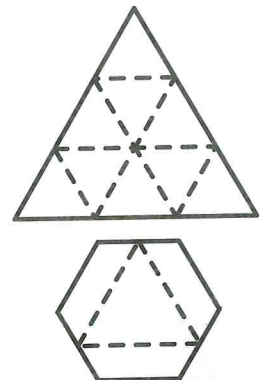
3. Bestimme den Anteil, den die Figur von Aufgabe 2 am großen Dreieck hat. Verdeutliche deine Überlegungen an einer Skizze.

Anteil:

4. Wende dein Faltblatt und fülle dann den folgenden Lückentext aus:

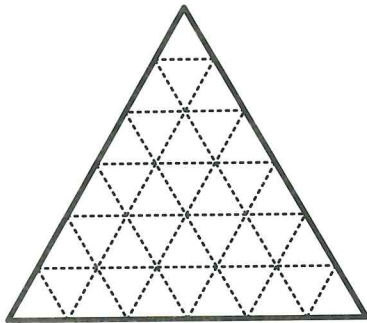
Ich erkenne ein in einem

Die innere Figur nimmt des Sechsecks ein.

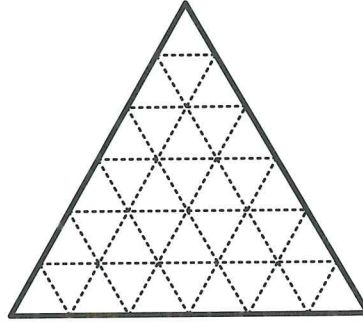


Brüche im Dreieck (2/2)

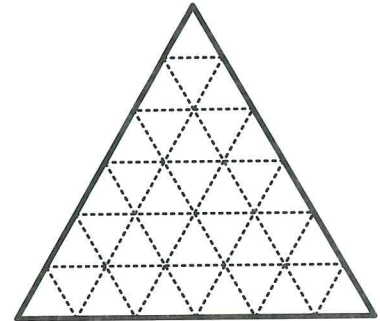
5. Falte selbst verschiedene Figuren aus deinem Faltblatt. Lasse dann deinen Nachbarn angeben, welchen Anteil deine Figur am großen Dreieck hat. Zeichnet eure Figuren auf:



Anteil:

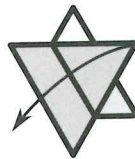
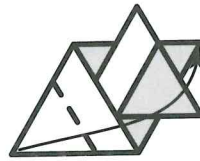
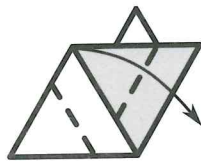
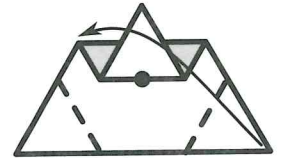
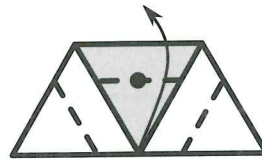
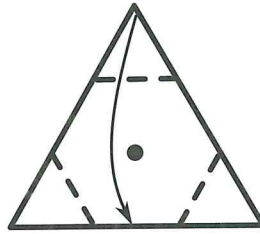
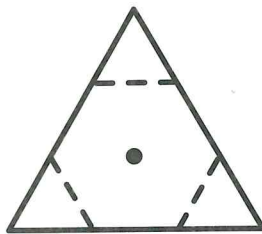


Anteil:



Anteil:

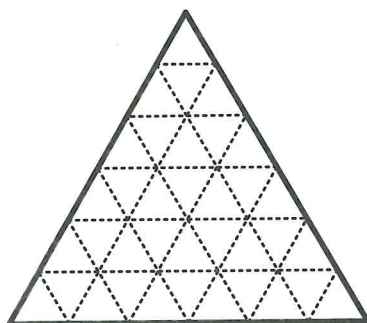
6. Falte entsprechend der folgenden Anleitung einen Stern.



schiebe die Laschen
untereinander



Wende deinen Stern und male die sichtbare Fläche an.
Schätze, welchen Anteil der Stern am großen Dreieck einnimmt. Lasse auch deinen Nachbarn schätzen und überprüft anschließend eure Schätzungen, indem ihr eure Sterne wieder entfaltet.



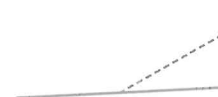
Meine Schätzung:

Schätzung meines Nachbarn:

überprüfter Anteil:

Exponentielles Wachstum

Klasse: 9/10 (oder auch ab 5, s.u.)
Material: DIN-A4-Blätter



Didaktische Hinweise

Diese Falteinheit soll den Schülern anhand des Faltens „bis zum Mond“ verdeutlichen, was **exponentielles Wachstum** bedeutet. Durch vorheriges Schätzen kann deutlich gemacht werden, wie stark man sich verschätzt und wie sehr die einzelnen Schülerschätzungen voneinander abweichen. Dies kann gleichzeitig als Motivation zur rechnerischen Überprüfung genutzt werden.

Lösungen und methodische Tipps

Die Idee des „mondsüchtigen Faltens“ ist im Prinzip auch bereits in Klassenstufe 5 einsetzbar, da auch dort schon Potenzen behandelt werden. Dabei sollte jedoch stärker geführt vorgegangen werden, da das jeweilige Verdoppeln durch das Falten im Vordergrund steht und nicht das formale Rechnen.

zu 1. Man schafft in der Regel etwa 6 saubere Faltungen.

Die Dicke eines Blattes Papier kann man sich schnell herleiten. Ein Stapel herkömmliches Kopierpapier mit 500 Blatt ist etwa 5 cm hoch, womit man auf eine Papierdicke von 0,1 mm kommt.

Anzahl der Faltungen	0	1	2	3	4	5	...	n
Anzahl der Papierlagen	1	2	4	8	16	32	...	2^n
Dicke des Faltstapels	0,1 mm	0,2 mm	0,4 mm	0,8 mm	1,6 mm	3,2 mm	...	$0,1 \cdot 2^n$ mm

zu 2. Der Mond ist **384 400 km** von der Erde entfernt. Man braucht tatsächlich **42 Faltungen**, um diese Entfernung knapp zu überschreiten.

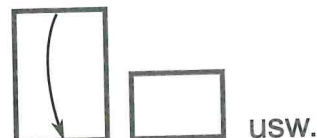
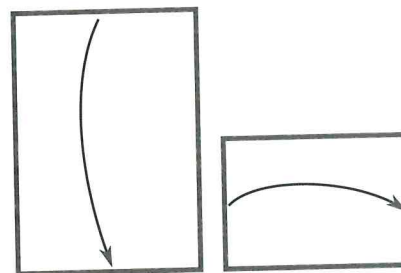
zu 3. Nach 10 Faltungen hat man **1024** Papierlagen, das kann man auf Tausender runden, also **1000** Papierlagen. Die ursprüngliche Dicke hat sich also ver-**1000**-facht. Nach 10 weiteren Faltungen ver-**1000**-facht sich die Dicke wieder.

Anzahl der Faltungen	0	10	20	30	40	41	42
Gerundete Anzahl der Papierlagen	1	1000	10^6	10^9	10^{12}	$2 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{12}$
Dicke des Faltstapels	0,1 mm	100 mm	100 m	100 km	100 000 km	200 000 km	400 000 km

Exponentielles Wachstum – Mondsüchtig

Das brauchst du:

- ✓ DIN-A4-Blatt



Vorbereitung

Falte das Papier so oft wie möglich auf die Hälfte seiner jeweiligen Größe.

Aufgaben

1. Ich schaffe es, das Papier-mal sauber zu falten. Dabei gilt:

Anzahl der Faltungen	0	1	2	3	4	5	...	n
Anzahl der Papierlagen	1	2						
Dicke des Faltstapels	0,1mm							

2. Stelle dir vor, du könntest das Papier beliebig oft falten. Schätze, wie viele Faltungen du brauchst, um mit dem Stapel bis zum Mond zu kommen.

Der Mond ist km von der Erde entfernt. Ich schätze, Faltungen bis dorthin zu benötigen.

Überprüfe deine Schätzung mit dem Taschenrechner!

Man braucht tatsächlich Faltungen.

3. Es geht aber alles viel einfacher:

Nach 10 Faltungen hat man Papierlagen, das kann man auf Tausender runden, also Papierlagen. Die ursprüngliche Dicke hat sich also ver-.....-facht.

Nach 10 weiteren Faltungen ver-.....-facht sich die Dicke wieder.

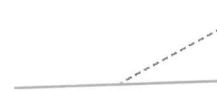
Damit erhält man ganz schnell:

Anzahl der Faltungen	0	10	20	30	40	41	42
Gerundete Anzahl der Papierlagen	1						
Dicke des Faltstapels	0,1mm						

Unendlich viele Brüche

Klasse: 9/10

Material: DIN-A4-Blätter, farbige Stifte



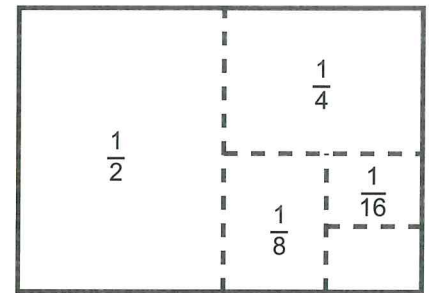
Didaktische Hinweise

Bei Bewerbungstests treten nicht selten Zahlenfolgen auf, bei denen die Bewerber zu vorgegebenen Zahlen Muster erkennen und diese fortsetzen müssen. Dies fällt vielen Schülern schwer, zumal ihnen eine konkrete Anwendung zu den Zahlenfolgen oft fehlt.

Mit dieser Falteinheit soll eine Motivation gefunden werden, **Zahlenfolgen und deren Grenzwerte sowie Grenzwerte von Reihen** auf anschauliche Weise zu betrachten.

Lösungen und methodische Tipps

zu 1. Die Abbildung rechts zeigt eine mögliche Darstellung. Aus Platzgründen ist hier nur der Ansatz dargestellt, die Darstellung der Schüler müsste dann mindestens noch den Bruch $\frac{1}{1024}$ zeigen.



Anzahl der Faltungen	0	1	2	3	4	5	...	n
Anteil der Fläche am Gesamtblatt	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...	$\frac{1}{2^n}$

Die Brüche entstehen durch wiederholtes Halbieren. Dies entspricht auch der Falthandlung, bei der das Blatt immer wieder halbiert wird. Dieses Beispiel bietet sich demnach an, den Unterschied zwischen rekursiver und expliziter Darstellung von Zahlenfolgen zu behandeln und die jeweiligen Vor- und Nachteile zu besprechen. (⇒Kasten)

zu 3. Wenn n immer größer wird, wird die n-te Fläche immer **kleiner**. Nähert sich n sogar unendlich an ($n \rightarrow \infty$), dann nähert sich die Größe der Fläche 0 an.

zu 4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$
Diese Summe „sieht“ man schon, wenn man die einzelnen Flächen addiert und mit diesen das gesamte A4-Blatt ausfüllt. (⇒Kasten)



Leistungstärkere Schüler könnten auch die harmonische Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ untersuchen, die keinen Grenzwert besitzt, sondern bis ins Unendliche steigt.

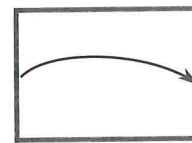
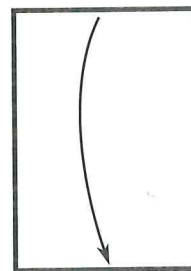


Ebenso lassen sich die Punkte, die jedem Faltschritt den Flächenanteil zuordnen, auch als Graph darstellen (sei es als Zusatzaufgabe für leistungstärkere Schüler oder als Hilfe für visuelle Lerner). Dabei muss allerdings darauf geachtet werden, dass es sich um einen Definitionsbereich mit natürlichen Zahlen handelt, weshalb die Punkte nicht miteinander verbunden werden dürfen.

Unendlich viele Brüche

Das brauchst du:

- ✓ DIN-A4-Blatt
- ✓ farbige Stifte



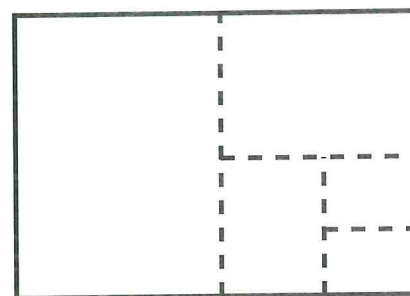
usw.

Vorbereitung

Falte das Papier zunächst so oft wie möglich auf die Hälfte seiner jeweiligen Größe und falte es danach wieder auf.

Aufgaben

1. Färbe die in jedem Schritt entstandenen Flächen in unterschiedlichen Farben ein und notiere den Anteil, den diese am Gesamtblatt haben, als Bruch.
Flächen, die du nicht mehr falten konntest, zeichnest du einfach ein, sodass du am Ende mindestens zehn verschiedene Flächen markiert hast.



2. Fülle die Tabelle aus und formuliere in eigenen Worten eine Regel, wie die Brüche jeweils aus ihrem Vorgängerbruch entstehen. Wie passt das zu deinem Faltvorgang aus Aufgabe 1?

Anzahl der Faltungen	0	1	2	3	4	5	...	n
Anteil der Fläche am Gesamtblatt	1	$\frac{1}{2}$						

3. Fülle die Lücken:

Wenn n immer größer wird, wird die n-te Fläche immer Nähert sich n sogar unendlich an ($n \rightarrow \infty$), dann nähert sich die Größe der Fläche an.

4. Welches Ergebnis erhält man wohl, wenn man die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ bildet? Veranschauliche dir die Rechnung mit deinem Faltblatt.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \dots$$

Begründung:

Überprüfe das Ergebnis (evtl. näherungsweise) mit dem Taschenrechner.



Quadrat falten

Klasse: 5/6

Material: DIN-A4-Blätter, ggf. Anleitungskarte „Senkrechte, Parallele und Quadrat“

Didaktische Hinweise

Mit dieser Falteinheit sollen Grundhandlungen, nämlich das Falten von **Senkrechten** und **Parallelen**, geübt werden.

Dass das DIN-A4-Blatt vorher in ein „krummes“ Blatt verwandelt wird, verhindert die Verführungen, sich am Papierrand zu orientieren, wie es bei rechteckigen Blättern häufig zu beobachten ist.

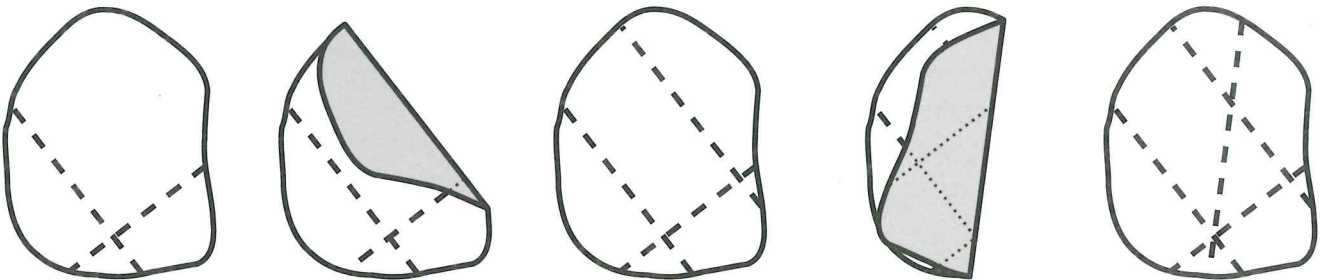
Lösungen und methodische Tipps

Die Anleitungskarte auf S. 10 bietet eine gestufte Hilfe für das Falten von Senkrechten, Parallelen und letztlich dem Quadrat. (⇒ Kasten)

zu 1. Die Anleitungskarte „Senkrechte, Parallele und Quadrat“ stellt das Vorgehen dar.

zu 2. Die Seiten sind **gleich lang** und stehen **senkrecht zueinander**.
Die Diagonalen sind **gleich lang** und stehen **senkrecht zueinander**.

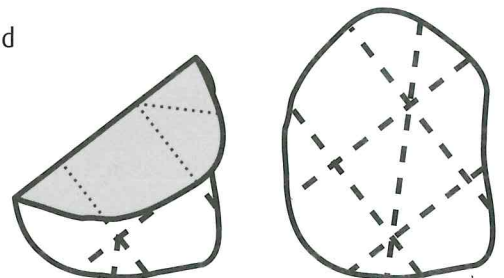
zu 3. Die Abbildungen zeigen einen möglichen Faltvorgang.



zu 4. Insgesamt sind 8 rechte Winkel markiert: 4 Ecken des Quadrates und die 4 Winkel durch die sich schneidenden Diagonalen.

zu 5. Es gibt 8 Dreiecke, jeweils 4 dergleichen Sorte, also insgesamt 2 verschiedene.

zu 6. Es muss darauf geachtet werden, dass eine Parallele entsteht, wenn man die Senkrechte zu einer Senkrechten faltet.
Faltet man bspw. den Eckpunkt des Quadrates auf die Mitte, so liegen die Abschnitte der anderen Diagonale beim Falten übereinander, man erzeugt also zu ihr eine Senkrechte, die dann parallel zur ersten Diagonalen ist.



Wir haben die Anleitungskarte auf dem Schülerarbeitsblatt bewusst nicht als Material angegeben, um Ihnen Differenzierungsmöglichkeiten zu geben.



Quadrat falten

Das brauchst du:

- ✓ DIN-A4-Blatt



Vorbereitung

Reiße von dem DIN-A4-Blatt Teile ab, sodass du ein möglichst unregelmäßiges Blatt Papier ohne gerade Kanten erhältst.

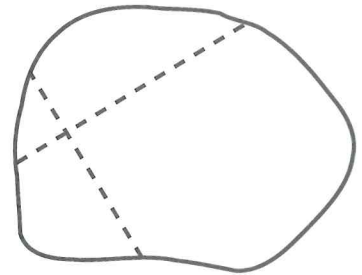
Aufgaben

1. Falte zwei zueinander senkrechte Linien. Beschreibe dein Vorgehen.

.....

.....

.....



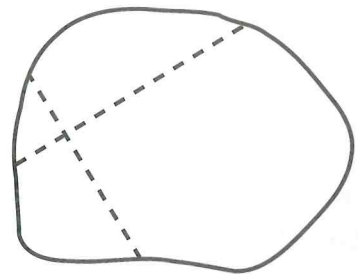
2. Bevor du nun ein Quadrat falten wirst, sollst du noch einige Überlegungen zu Längen und Lagebeziehungen anstellen: Welche Eigenschaften besitzt ein Quadrat?

Die Seiten sind und stehen

Die Diagonalen sind und stehen

3. Falte nun das Quadrat. Skizziere in der Abbildung rechts deine Faltlinien und nummeriere sie in der Reihenfolge ihrer Entstehung.

4. Falte die zweite Diagonale und markiere alle rechten Winkel auf deinem Faltblatt.



5. Wie viele Dreiecke erkennst du in deinem gefalteten Quadrat?

Ich erkenne Dreiecke, wobei es nur verschiedene sind.

6. a) Wähle eine Diagonale aus und falte mindestens eine zu ihr parallele Linie.
b) Beschreibe dein Vorgehen.

.....

- c) Begründe, warum die gefaltete Linie tatsächlich parallel zur Diagonalen ist.

.....

.....

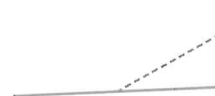
.....



Winkel und Figuren

Klasse: 5/6

Material: DIN-A4-Blätter, Anleitungskarte „Gleichseitiges Dreieck aus einem DIN-A4-Blatt“, farbige Stifte



Didaktische Hinweise

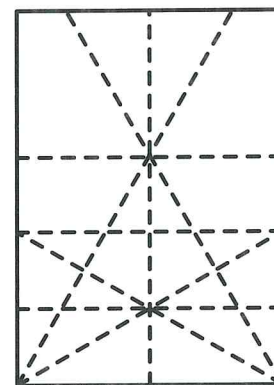
Diese Falteinheit bietet sich zur Festigung von **Winkeln an geschnittenen Parallelen** an. Nach dem Falten einer einfachen Figur treten bestimmte Winkel immer wieder auf, was bei den Schülern zu Überraschungen und ggf. der Frage nach dem „Warum ist das so?“ führen kann. Vielfältige Argumentationsmöglichkeiten bieten sich auch im Zusammenhang mit den Winkeln im **gleichseitigen Dreieck** an, wobei z. B. auch auf die **Innenwinkelsumme in Dreiecken** zurückgegriffen werden kann.



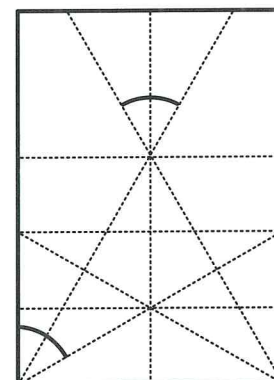
Nicht unbedingt wird jeder Schüler alle 60° -Winkel (Aufgabe 3) oder alle gleichseitigen Dreiecke (Aufgabe 4) finden. Dennoch wird jeder Schüler durch das Finden einiger Winkel bzw. Figuren Erfolgserlebnisse haben und kann dann im Austausch mit den Mitschülern seine Darstellungen ergänzen.

Lösungen und methodische Tipps (⇒ Kasten)

- zu 1. Verhältnis: 1:2. Dies lässt sich gut erkennen, wenn man die drei Parallelen wie in der rechts stehenden Abbildung faltet.
- zu 2. $\alpha = 30^\circ$
- zu 3. Hier sind individuelle Lösungen möglich.
- zu 4. Hat man bei Aufgabe 1 die Parallelen gefaltet, so sind 6 gleichseitige Dreiecke zu erkennen.
- zu 5. Betrachtet man keine „linienübergreifenden Winkel“, so gibt es nur 30° -, 60° -, 90° - und 120° -Winkel.
- zu 6. Die Begründungen verlangen in der Regel die Betrachtungen von Stufen- und Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen sowie von Scheitel- und Nebenwinkeln.



Aufgrund der Partnerarbeit sind hier selbstdifferenzierende Unterrichtsphasen möglich. Es könnten auch vom Lehrer (nicht so leicht ersichtliche) Winkel vorgegeben werden, deren Gleichheit dann von den Schülern begründet werden muss (siehe Beispiel in der Abbildung rechts).





Winkel und Figuren

Das brauchst du:

- ✓ DIN-A4-Blatt
- ✓ farbige Stifte
- ✓ Anleitungskarte:
„Gleichseitiges Dreieck aus einem DIN-A4-Blatt“



Vorbereitung

Falte ein gleichseitiges Dreieck (Schritte (a) bis (f) auf der Anleitungskarte).

Aufgaben

1. In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABC? Überprüfe deine Vermutung durch Falten.

Verhältnis: :

2. Wie groß ist der Winkel α ? Falte wieder, um es herauszufinden.

$\alpha = \dots\dots\dots$

3. Markiere auf deinem Faltblatt alle 60° -Winkel in derselben Farbe.

4. Zähle, wie viele gleichseitige Dreiecke du auf deinem Faltblatt siehst.

Anzahl:

5. Findest du weitere Winkel, die häufig auftreten? Markiere auch diese mit einer einheitlichen Farbe. Notiere sie in der Tabelle.

Winkel	60°	$\dots\dots\dots^\circ$	$\dots\dots\dots^\circ$	$\dots\dots\dots^\circ$
Farbe	☐	☐	☐	☐

6. Tippe auf zwei gleich große Winkel. Dein Nachbar begründet, warum diese die gleiche Größe haben. Denkt dabei z.B. an besondere Winkel!
7. Welche geometrischen Figuren findest du noch auf dem Faltblatt? Zeichne möglichst viele in die Abbildungen ein und gib ihre Namen an. Vielleicht findest du ja sogar den Stern, der sich versteckt hat?

